非線形波動方程式の定在波解

[振動数が質量に比例する条件]

量子力学より粒子の持つエネルギーは

$$E = h\nu$$

ただしここではEはエネルギー　hはプランク定数　νは振動数
特殊相対論より

$$E = mc^2$$

ただしmは質量　cは光速
以上より

$$m = \frac{h\nu}{c^2}$$

となって質量は振動数に比例する。
「光速と質量の関係」[文献 1]から質量は$\nabla^2 c^2$の体積積分に比例すると推測できる。
もしも荷電粒子の固有振動数に共振した定在波が荷電粒子の周辺にあってその定在波の持つ$\nabla^2 c^2$の体積積分が振動数に比例するような解があれば以上のことを説明できる可能性がある。

そこで次のような定在波解を考える。

$$E = f(x, y, z)\cos(\omega t)\cos(\frac{\omega}{c_0}x) \tag{1}$$

ただしこれ以降Eは電界強度
$f(x, y, z)$は(x, y, z)の関数
ωは固有角周波数

c_0は一般に真空中の光速と呼ばれる定数
cを光速とし真空中で現在の測定精度以下の範囲で電界強度に依存して変化するとし

$$c^2 = c_0^2 - k_c E^p \tag{2}$$

$$c_0^2 >> \left| k_c E^p \right| \tag{2a}$$

とする。

ただし k_c , p は定数

以下の波動方程式が適用できるとする。

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 E \tag{3}$$

(1)と(3)左辺より

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(f(x,y,z)(-\omega)\sin(\omega t)\cos(\frac{\omega}{c_0}x) \right)$$

$$= f(x,y,z)(-\omega^2)\cos(\omega t)\cos(\frac{\omega}{c_0}x) \tag{4}$$

(1)と (3)右辺より

$$c^2\nabla^2 E = c^2\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\cos(\omega t)\cos(\frac{\omega}{c_0}x) + f(x,y,z)\cos(\omega t)(-\frac{\omega}{c_0})\sin(\frac{\omega}{c_0}x) \right)$$

$$+ c^2\left(\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2}\cos(\omega t)\cos(\frac{\omega}{c_0}x) \right) + c^2\left(\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2}\cos(\omega t)\cos(\frac{\omega}{c_0}x) \right)$$

$$= c^2\left(\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2}\cos(\omega t)\cos(\dfrac{\omega}{c_0}x) \\ + 2\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\cos(\omega t)(-\dfrac{\omega}{c_0})\sin(\dfrac{\omega}{c_0}x) + f(x,y,z)\cos(\omega t)(-\dfrac{\omega^2}{c^2{}_0})\cos(\dfrac{\omega}{c_0}x) \end{array} \right)$$

$$+ c^2\left(\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2}\cos(\omega t)\cos(\frac{\omega}{c_0}x) \right) + c^2\left(\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2}\cos(\omega t)\cos(\frac{\omega}{c_0}x) \right)$$

$$= c^2\left(\begin{array}{l} \nabla^2 f(x,y,z)\cos(\omega t)\cos(\dfrac{\omega}{c_0}x) \\ + 2\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\cos(\omega t)(-\dfrac{\omega}{c_0})\sin(\dfrac{\omega}{c_0}x) \\ + f(x,y,z)\cos(\omega t)(-\dfrac{\omega^2}{c^2{}_0})\cos(\dfrac{\omega}{c_0}x) \end{array} \right) \tag{5}$$

t と x についてフーリエ変換を行い $\cos(\omega t)\cos(\frac{\omega}{c_0}x)$ 項を取りだすと

(4)式より

$$\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{\omega}{\pi c_0}\int_0^{\frac{2\pi c_0}{\omega}} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}\cos(\omega t)\cos(\frac{\omega}{c_0}x)dxdt$$

$$=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{\omega}{\pi c_0}\int_0^{\frac{2\pi c_0}{\omega}} f(x,y,z)(-\omega^2)\cos^2(\omega t)\cos^2(\frac{\omega}{c_0}x)dxdt=-\omega^2 f(x,y,z) \tag{6}$$

(2)(5)式より

$$\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{\omega}{\pi c_0}\int_0^{\frac{2\pi c_0}{\omega}} c^2\nabla^2 E\cos(\omega t)\cos(\frac{\omega}{c_0}x)dxdt$$

$$=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{\omega}{\pi c_0}\int_0^{\frac{2\pi c_0}{\omega}} \left(c_0^2-k_cE^p\right)\begin{pmatrix}\nabla^2 f(x,y,z)\cos^2(\omega t)\cos^2(\frac{\omega}{c_0}x)\\ +f(x,y,z)\cos(\omega t)^2(-\frac{\omega^2}{c^2{}_0})\cos^2(\frac{\omega}{c_0}x)\end{pmatrix}dxdt$$

$$=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{\omega}{\pi c_0}\int_0^{\frac{2\pi c_0}{\omega}} \begin{pmatrix}c_0^2\nabla^2 f(x,y,z)\cos^2(\omega t)\cos^2(\frac{\omega}{c_0}x)\\ +f(x,y,z)\cos(\omega t)^2(-\frac{\omega^2}{c^2{}_0})\cos^2(\frac{\omega}{c_0}x)\end{pmatrix}dxdt$$

$$+\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{\omega}{\pi c_0}\int_0^{\frac{2\pi c_0}{\omega}} \left(-k_c f^p(x,y,z)\cos^p(\omega t)\cos^p(\frac{\omega}{c_0}x)\right)\left(f(x,y,z)\cos^2(\omega t)(-\frac{\omega^2}{c^2{}_0})\cos^2(\frac{\omega}{c_0}x)\right)dxdt$$

$$=c_0^2\nabla^2 f(x,y,z)-\omega^2 f(x,y,z)-k_c f^{p+1}(x,y,z)(-\frac{\omega^2}{c^2{}_0})\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos^{p+2}(\theta)d\theta\right)^2 \tag{7}$$

したがって

$$\nabla^2 f(x,y,z) = -k_c \frac{\omega^2}{{c_0}^4}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos^{p+2}(\theta)d\theta\right)^2 f^{p+1}(x,y,z) \tag{8}$$

k_L を定数とし

$$k_L = k_c \frac{1}{{c_0}^4}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos^{p+2}(\theta)d\theta\right)^2 \tag{9}$$

とすると(8)(9)より

$$\nabla^2 f(x,y,z) = -k_L \omega^2 f^{p+1}(x,y,z) \tag{10}$$

となって $f(x,y,z)$ のラプラシアンは振動数の２乗と $f(x,y,z)$ の $p+1$ 乗の積に比例する。

ここで極座標系において $f\ (x,y,z)$ を半径と角周波数で正規化できる条件を求める。

r_0 を基準半径とし

$r_0 = \frac{1}{\omega^n}$ (11) とする

R を正規化された半径とし

$R = \frac{r}{r_0}$ (12)

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^3}$ (13) とする。

$f\ (r,\omega) = f\ (x,y,z,\omega)$ と表現する。

$F\ (R)$ を正規化された $f\ (r,\omega)$ とし

$F(R) = \frac{f\ (r,\omega)}{\omega^l}$ (14)

とする。

$$\nabla^2 f(r,\omega) = \frac{2}{r}\frac{\partial f(r,\omega)}{\partial r} + \frac{\partial^2 f(r,\omega)}{\partial r^2} = \frac{2\omega^n}{R}\omega^n \frac{\partial\left(\omega^l F(R)\right)}{\partial R} + \omega^{2n}\frac{\partial^2\left(\omega^l F(R)\right)}{\partial R^2}$$

$$= 2\omega^{2n+l} \frac{\partial F(R)}{\partial R} + \omega^{2n+1} \frac{\partial^2 F(R)}{\partial R^2} \quad (15)$$

(10)(14)より

$$\nabla^2 f(r,\omega) = -k_L \omega^2 f^{p+1}(r,\omega) = -k_L \omega^2 \omega^{pl+l} F^{p+1}(R) = -k_L \omega^{pl+l+2} F^{p+1}(R) \quad (16)$$

(15)(16)より

$$-k_L \omega^{pl+l+2} F^{p+1}(R) = 2\omega^{2n+l} \frac{\partial F(R)}{\partial R} + \omega^{2n+l} \frac{\partial^2 F(R)}{\partial R^2} \quad (17)$$

正規化ができるとすればこの式がωに依存しない条件として

$$pl + l + 2 = 2n + l \quad (18)$$

が成立する必要がある。
したがって

$$pl + 2 = 2n \quad (18a)$$

これが成立すると仮定すると(17)式を
$\omega^{pl+l+2} = \omega^{2n+l}$で割って

$$-k_L F^{p+1}(R) = 2\frac{\partial F(R)}{\partial R} + \frac{\partial^2 F(R)}{\partial R^2} \quad (19)$$

となってωに依存しない正規化された式となる。

次に質量の総量を求める

(2)式をもう一度書くと

$$c^2 = c_0^2 - k_c E^p \quad (2)$$

$\overline{c^2}$ を c^2 の平均とすると

$$\overline{c^2} = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{\omega}{2\pi c_0}\int_0^{\frac{2\pi c_0}{\omega}} c^2 dxdt = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{\omega}{2\pi c_0}\int_0^{\frac{2\pi c_0}{\omega}} \left(c_0^2 - k_c E^p\right) dxdt$$

$$= \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{\omega}{2\pi c_0}\int_0^{\frac{2\pi c_0}{\omega}} \left(c_0^2 - k_c f^p(r,\omega)\cos^p(\omega t)\cos^p(\frac{\omega}{c_0}x)\right) dxdt$$

$$= c_0^2 - k_c \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^p(\theta) d\theta\right)^2 f^p(r,\omega) \quad (20)$$

$$\nabla^2 \overline{c^2} = -k_c \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^p(\theta) d\theta\right)^2 \nabla^2 f^p(r,\omega) \quad (20a)$$

$$\nabla^2 \overline{c^2} = -k_c \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^p(\theta) d\theta\right)^2 \left(\frac{2}{r}\frac{\partial f^p(r,\omega)}{\partial r} + \frac{\partial^2 f^p(r,\omega)}{\partial r^2}\right)$$

$$= -k_c \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^p(\theta) d\theta\right)^2 \left(\frac{2\omega^n}{R}\omega^n \frac{\partial\left(\omega^{pl} F^{pl}(R)\right)}{\partial R} + \omega^{2n}\frac{\partial^2\left(\omega^{pl} F^{pl}(R)\right)}{\partial R^2}\right)$$

$$= -k_c \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^p(\theta) d\theta\right)^2 \left(\frac{2\omega^{2n+pl}}{R}\frac{\partial\left(F^{pl}(R)\right)}{\partial R} + \omega^{2n+pl}\frac{\partial^2\left(F^{pl}(R)\right)}{\partial R^2}\right) \quad (21)$$

mを質量とし

「光速と質量の関係」[文献 1]から

$$m = \frac{1}{16\pi G}\int_v \nabla^2 c^2 dv \qquad (22)$$

とする

ただしdvは微小体積

(21)(22)より

$$m = \frac{1}{16\pi G}\int_v \nabla^2 c^2 dv = \frac{1}{16\pi G}\int_{R=0}^{\infty}\left(\nabla^2 \overline{c^2}\right)\pi r^2 dr \qquad (22a)$$

$$m = -\frac{1}{16\pi G}k_c\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^p(\theta)d\theta\right)^2\int_{R=0}^{\infty}\left(\frac{2\omega^{2n+pl}}{R}\frac{\partial\left(F^{pl}(R)\right)}{\partial R} + \omega^{2n+pl}\frac{\partial^2\left(F^{pl}(R)\right)}{\partial R^2}\right)\pi\frac{R^2}{\omega^{2n}}\frac{1}{\omega^n}dR$$

$$= -\frac{1}{16\pi G}k_c\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^p(\theta)d\theta\right)^2\omega^{pl-n}\int_{R=0}^{\infty}\left(\frac{2}{R}\frac{\partial\left(F^{pl}(R)\right)}{\partial R} + \frac{\partial^2\left(F^{pl}(R)\right)}{\partial R^2}\right)\pi R^2 dR$$

(23)

振動数が質量に比例するには

$$pl - n = 1 \qquad (24)$$

が成立する必要がある。

これが成立すると仮定すると

νを振動数とし

$$m = k_1\omega = 2\pi k_1\nu \qquad (25)$$

ただしk_1を定数とし

$$k_1 = -\frac{1}{16\pi G}k_c\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^p(\theta)d\theta\right)^2\int_{R=0}^{\infty}\left(\frac{2}{R}\frac{\partial\left(F^{pl}(R)\right)}{\partial R} + \frac{\partial^2\left(F^{pl}(R)\right)}{\partial R^2}\right)\pi R^2 dR$$

(26)

とする

条件をもう一度書くと

$$pl + 2 = 2n \qquad (18a)$$

$$pl - n = 1 \qquad (24)$$

２つの式より

$n = 3$ (27)

$pl = 4$ (28)

単純なケースとして p と l が正の整数である場合について検証してみることにする。

(9)(10)式より

$$k_L = k_c \frac{1}{{c_0}^4}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos^{p+2}(\theta)d\theta\right)^2 = k_c \frac{1}{{c_0}^4}\left(\frac{2(p+1)!!}{(p+2)!!}\right)^2 \qquad (29)$$

$$\nabla^2 f(x,y,z) = -k_L\omega^2 f^{p+1}(x,y,z) = -k_c \frac{1}{{c_0}^4}\left(\frac{2(p+1)!!}{(p+2)!!}\right)^2 \omega^2 f^{p+1}(x,y,z)$$

(29a)

(25)(26)式より

$$m = k_1\omega = -k_m k_c\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^p(\theta)d\theta\right)^2 \omega\int_{R=0}^{\infty}\left(\frac{2}{R}\frac{\partial\left(F^{pl}(R)\right)}{\partial R} + \frac{\partial^2\left(F^{pl}(R)\right)}{\partial R^2}\right)\pi R^2 dR$$

$$= -\frac{1}{16\pi G}k_c\left(\frac{(p-1)!!}{p!!}\right)^2 \omega\int_{R=0}^{\infty}\left(\frac{2}{R}\frac{\partial\left(F^{pl}(R)\right)}{\partial R} + \frac{\partial^2\left(F^{pl}(R)\right)}{\partial R^2}\right)\pi R^2 dR$$

(30)

(28)より p が決定されれば l が決定するので

p を特定しない場合	$pl = 4$ (28) $c^2 = c_0^2 - k_c E^p$ (2) $r_0 = \frac{1}{\omega^n} = \frac{1}{\omega^3}$ (11) $F(R) = \frac{f\ (r,\omega)}{\omega^l}$ (14)
$p = 1$ の場合	$l = 4$ (31) $c^2 = c_0^2 - k_c E$ (32) $r_0 = \frac{1}{\omega^3}$ (33) $F(R) = \frac{f\ (r,\omega)}{\omega^4}$ (34)
$p = 2$ の場合	$l = 2$ (35) $c^2 = c_0^2 - k_c E^2$ (36) $r_0 = \frac{1}{\omega^3}$ (37) $F(R) = \frac{f\ (r,\omega)}{\omega^2}$ (38)
$p = 4$ の場合	$l = 1$ (39) $c^2 = c_0^2 - k_c E^4$ (40) $r_0 = \frac{1}{\omega^3}$ (41) $F(R) = \frac{f\ (r,\omega)}{\omega^1}$ (42)

となる。

ここで $f\ (r,\omega)$ の関数の形を検証してみる。

(10)より

$$\frac{\partial f(r,\omega)}{\partial r}=\int_0^r \frac{\partial^2 f(r,\omega)}{\partial r^2}dr+\left.\frac{\partial f(r,\omega)}{\partial r}\right|_{r=0}=\int_0^r\left[\nabla^2 f(r,\omega)-\frac{2}{r}\frac{\partial f(r,\omega)}{\partial r}\right]dr+\left.\frac{\partial f(r,\omega)}{\partial r}\right|_{r=0}$$

$$=\int_0^r\left[-k_L\omega^2 f^{p+1}(x,y,z)-\frac{2}{r}\frac{\partial f(r,\omega)}{\partial r}\right]dr+\left.\frac{\partial f(r,\omega)}{\partial r}\right|_{r=0}$$

$$f(r,\omega)=\int_0^r\frac{\partial f(r,\omega)}{\partial r}dr+\left.f(r,\omega)\right|_{r=0}$$

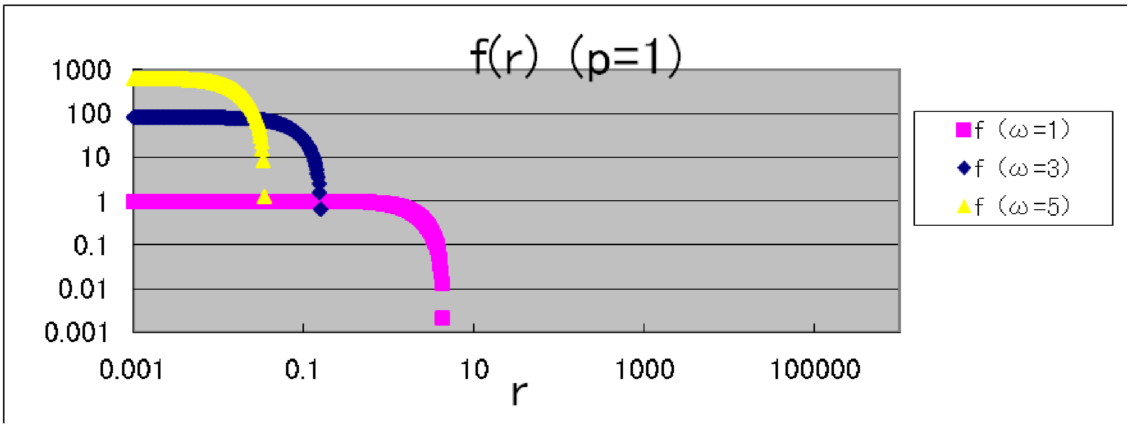
となることから中心の初期値から外に向かって積分することで $f\ (r,\omega)$ を求めることが出来る。

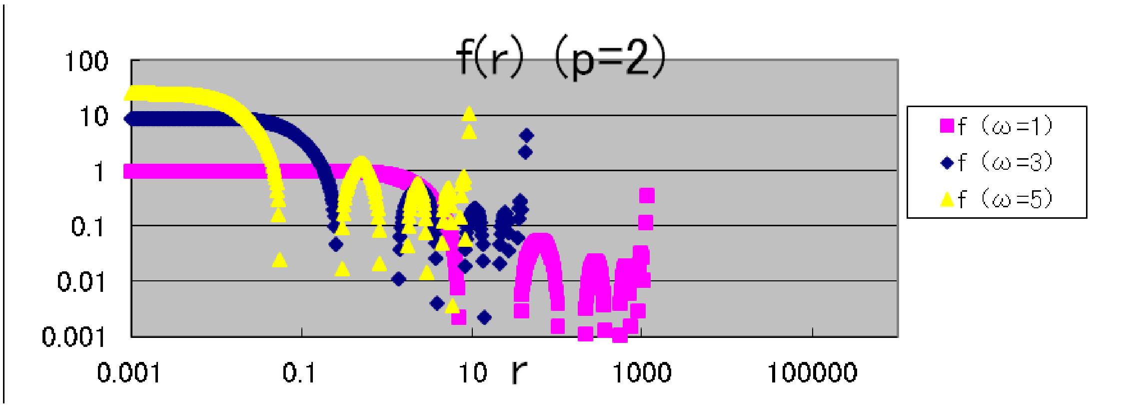
$$\left.f(r,\omega)\right|_{r=0}=1$$

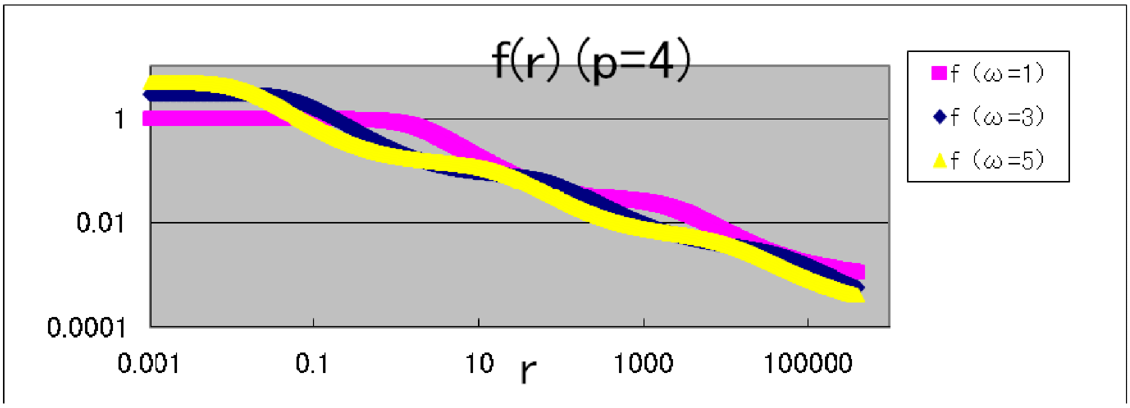
$$\left.\frac{\partial f(r,\omega)}{\partial r}\right|_{r=0}=0$$

$$k_L=1$$

と仮の値を代入し差分法により $f\ (r,\omega)$ を求め横軸 r として両対数グラフにした。

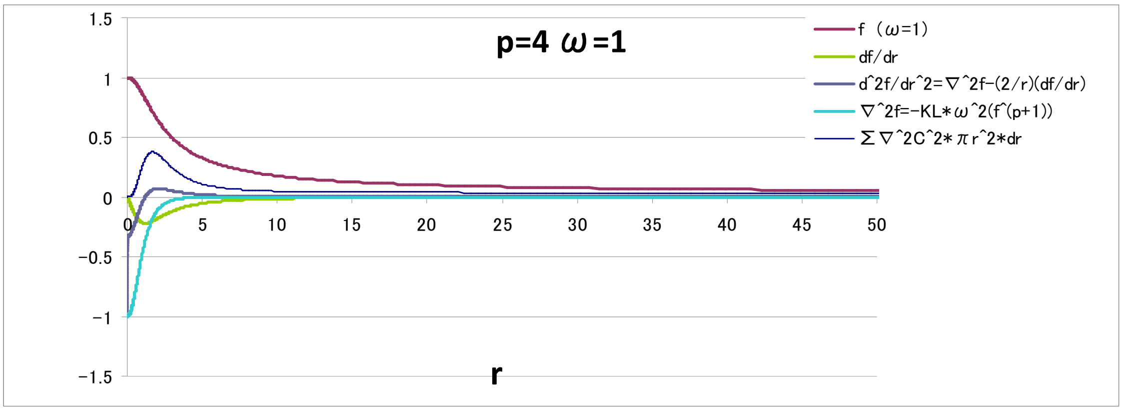






p= 1 , p=2 では、r の増大とともに $f\ (r,\omega)$ は発散したが p=4 では発散しなかった。

$k_c = 1$ とし p=4 ω=1 の場合についてリニアスケールで関数の形を見てみると各値は収束している。



今後は $p = 4$ を重点的に検証することとする。

$$p = 4 \qquad (42a)$$

(42a) (20a)より

$$\nabla^2 \overline{c^2} = -k_c \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^p(\theta) d\theta \right)^2 \nabla^2 f^p(r,\omega)$$

$$= -k_c \left(\frac{(p-1)!!}{p!!} \right)^2 \nabla^2 f^p(r,\omega)$$

$$= -k_c \left(\frac{9}{64} \right) \nabla^2 f^4(r,\omega) \qquad (43)$$

(29a)より

$$\nabla^2 f(x,y,z) = -k_c \frac{1}{{c_0}^4} \left(\frac{2(p+1)!!}{(p+2)!!} \right)^2 \omega^2 f^{p+1}(x,y,z) = -k_c \frac{1}{{c_0}^4} \frac{25}{64} \omega^2 f^{p+1}(x,y,z)$$

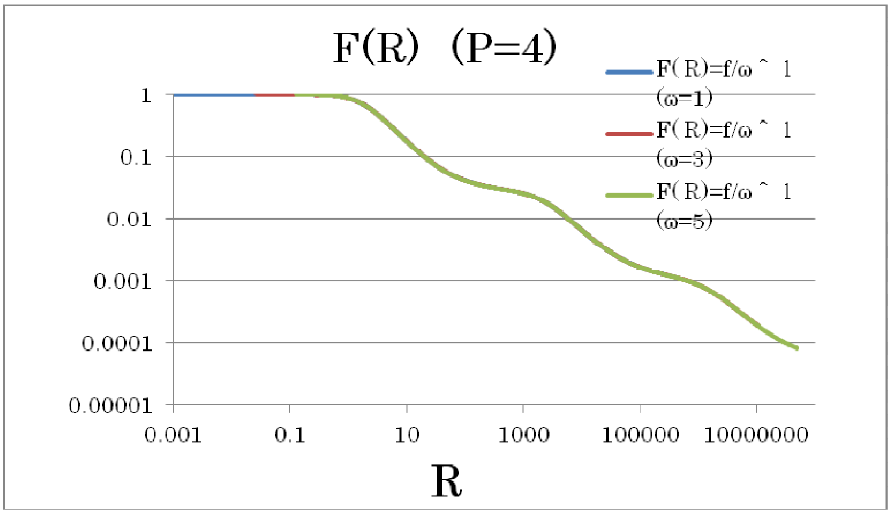
(44)

(30)より

$$m = k_1\omega = -\frac{1}{16\pi G}k_c\left(\frac{(p-1)!!}{p!!}\right)^2 \omega\int_{R=0}^{\infty}\left(\frac{2}{R}\frac{\partial\left(F^{pl}(R)\right)}{\partial R}+\frac{\partial^2\left(F^{pl}(R)\right)}{\partial R^2}\right)\pi R^2 dR$$
$$= -\frac{1}{16\pi G}k_c\frac{9}{64}\omega\int_{R=0}^{\infty}\left(\frac{2}{R}\frac{\partial\left(F^{4}(R)\right)}{\partial R}+\frac{\partial^2\left(F^{4}(R)\right)}{\partial R^2}\right)\pi R^2 dR$$

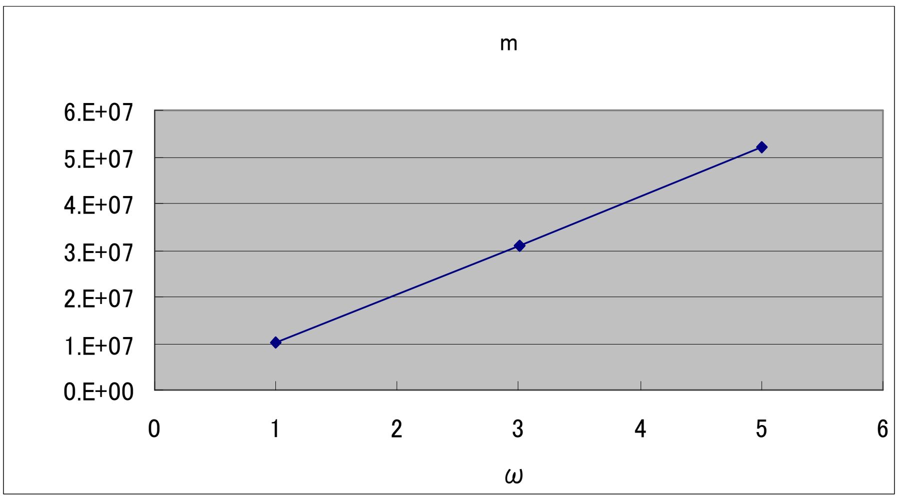
(45)

p=4 について(42)より F(R)を求めた。



ωが変化しても F(R)は変化しないことが確認され、正常に正規化されることが確認出来た。

(21) (22a)から質量 m を求めた。



ωによって直線的に変化することから質量が振動数に比例することが確認できた。これにより量子力学と相対論の本質的な繋がりを解明できる可能性がある。

参考文献

[1]長井鉄也「光速と質量の関係」
http://www.tegakinet.jp/wave/wave.files/lightweight.pdf