

## 定在波からのディラック方程式の導出

2013/12/01

長井鉄也

[非線形波動方程式の定在波解](#)が直交して3つ存在しているとしその中心付近は近似的に次のような電界の縦波で出来た定在波を形成しているとする。

$$\varphi_1 = \left[ 0, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 1 \right] \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\omega_0 x}{c}\right) \frac{\vec{x}}{|x|} \\ \sin\left(\frac{\omega_0 x}{c}\right) \frac{\vec{x}}{|x|} \\ \cos\left(\frac{\omega_0 y}{c}\right) \frac{\vec{y}}{|y|} \\ \sin\left(\frac{\omega_0 y}{c}\right) \frac{\vec{y}}{|y|} \\ \cos\left(\frac{\omega_0 z}{c}\right) \frac{\vec{z}}{|z|} \\ \sin\left(\frac{\omega_0 z}{c}\right) \frac{\vec{z}}{|z|} \end{bmatrix} \exp(-i\omega t)$$

$$\varphi_2 = \left[ -i, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}i, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 0 \right] \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\omega_0 x}{c}\right) \frac{\vec{x}}{|x|} \\ \sin\left(\frac{\omega_0 x}{c}\right) \frac{\vec{x}}{|x|} \\ \cos\left(\frac{\omega_0 y}{c}\right) \frac{\vec{y}}{|y|} \\ \sin\left(\frac{\omega_0 y}{c}\right) \frac{\vec{y}}{|y|} \\ \cos\left(\frac{\omega_0 z}{c}\right) \frac{\vec{z}}{|z|} \\ \sin\left(\frac{\omega_0 z}{c}\right) \frac{\vec{z}}{|z|} \end{bmatrix} \exp(-i\omega t)$$

ただし  $\omega_0$  は角周波数  $\frac{\vec{x}}{|x|}$ 、 $\frac{\vec{y}}{|y|}$ 、 $\frac{\vec{z}}{|z|}$  はそれぞれ  $x, y, z$  方向の単位ベクトル

この定在波の実数部を求めると

$$\begin{aligned}
\text{Re}(\varphi_1) &= \text{Re} \left( \left[ \sin\left(\frac{\omega_0 x}{c}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\cos\left(\frac{\omega_0 y}{c}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega_0 y}{c}\right), \sin\left(\frac{\omega_0 z}{c}\right) \right] \exp(-i\omega_0 t) \right) \\
&= \left[ \cos(\omega_0 t)\sin\left(\frac{\omega_0 x}{c}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sin(\omega_0 t)\cos\left(\frac{\omega_0 y}{c}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cos(\omega_0 t)\sin\left(\frac{\omega_0 y}{c}\right), \cos(\omega_0 t)\sin\left(\frac{\omega_0 z}{c}\right) \right] \\
&= \left[ \cos(\omega_0 t)\sin\left(\frac{\omega_0 x}{c}\right), \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\omega_0 t - \frac{\omega_0 y}{c}\right), \cos(\omega_0 t)\sin\left(\frac{\omega_0 z}{c}\right) \right] \\
\text{Re}(\varphi_2) &= \left[ \sin(\omega_0 t)\cos\left(\frac{\omega_0 x}{c}\right), \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\omega_0 t + \frac{\omega_0 y}{c}\right), \cos(\omega_0 t)\cos\left(\frac{\omega_0 z}{c}\right) \right]
\end{aligned}$$

となつて定在波 2 つと進行波または後退波 1 つの組み合わせとなる。

この  $\varphi_1 \varphi_2$  とスピンの積をとつても以下のように定在波 2 つと進行波または後退波 1 つの組み合わせとなる。

$$\text{Re} \left( [\varphi_1 \varphi_2] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \left[ \cos(\omega_0 t)\sin\left(\frac{\omega_0 x}{c}\right), \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\omega_0 t - \frac{\omega_0 y}{c}\right), \cos(\omega_0 t)\sin\left(\frac{\omega_0 z}{c}\right) \right]$$

$$\text{Re} \left( [\varphi_1 \varphi_2] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \left[ \sin(\omega_0 t)\cos\left(\frac{\omega_0 x}{c}\right), \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\omega_0 t + \frac{\omega_0 y}{c}\right), \cos(\omega_0 t)\cos\left(\frac{\omega_0 z}{c}\right) \right]$$

$$\text{Re} \left( [\varphi_1 \varphi_2] \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\omega_0 t + \frac{\omega_0 x}{c}\right), \sin(\omega_0 t)\cos\left(\frac{\omega_0 y}{c}\right), \cos(\omega_0 t)\sin\left(\frac{\omega_0 z}{c} + \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$\text{Re} \left( [\varphi_1 \varphi_2] \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \left[ -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\omega_0 t - \frac{\omega_0 x}{c}\right), -\cos(\omega_0 t)\sin\left(\frac{\omega_0 y}{c}\right), \cos(\omega_0 t)\sin\left(\frac{\omega_0 z}{c} - \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$\operatorname{Re} \left( [\varphi_1 \varphi_2] \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} i \end{bmatrix} \right) = \left[ \cos(\omega_0 t) \sin\left(\frac{\omega_0 x}{c} + \frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\omega_0 y}{c} - \frac{\pi}{4}\right), -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\omega_0 t - \frac{\omega_0 z}{c}\right) \right]$$

$$\operatorname{Re} \left( [\varphi_1 \varphi_2] \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} i \end{bmatrix} \right) = \left[ \cos(\omega_0 t) \sin\left(\frac{\omega_0 x}{c} - \frac{\pi}{4}\right), -\sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\omega_0 y}{c} + \frac{\pi}{4}\right), \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\omega_0 t + \frac{\omega_0 z}{c}\right) \right]$$

この定在波が速度  $\vec{v}$  で移動しているとする。

$c$  を光速とし速度  $\vec{v}$  で移動する静止系からみた時間と距離はローレンツ変換により

$$t' = \gamma \left( t - \frac{\vec{v} \cdot \vec{x}}{c^2} \right)$$

$$x' = \gamma(x - v_x t)$$

$$y' = \gamma(y - v_y t)$$

$$z' = \gamma(z - v_z t)$$

となる。

$$\text{ただし } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}}}$$

$$t \rightarrow t'$$

$$x \rightarrow x'$$

$$y \rightarrow y'$$

$$z \rightarrow z'$$

と置き換えをすると

$$\varphi_1 = \left[ 0, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 1 \right] \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\omega_0 x'}{c}\right) \frac{\bar{x}'}{|x'|} \\ \sin\left(\frac{\omega_0 x'}{c}\right) \frac{\bar{x}'}{|x'|} \\ \cos\left(\frac{\omega_0 y'}{c}\right) \frac{\bar{y}'}{|y'|} \\ \sin\left(\frac{\omega_0 y'}{c}\right) \frac{\bar{y}'}{|y'|} \\ \cos\left(\frac{\omega_0 z'}{c}\right) \frac{\bar{z}'}{|z'|} \\ \sin\left(\frac{\omega_0 z'}{c}\right) \frac{\bar{z}'}{|z'|} \end{bmatrix} \exp(-i\omega_0 t')$$

$$\varphi_2 = \left[ -i, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}i, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 0 \right] \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\omega_0 x'}{c}\right) \frac{\bar{x}'}{|x'|} \\ \sin\left(\frac{\omega_0 x'}{c}\right) \frac{\bar{x}'}{|x'|} \\ \cos\left(\frac{\omega_0 y'}{c}\right) \frac{\bar{y}'}{|y'|} \\ \sin\left(\frac{\omega_0 y'}{c}\right) \frac{\bar{y}'}{|y'|} \\ \cos\left(\frac{\omega_0 z'}{c}\right) \frac{\bar{z}'}{|z'|} \\ \sin\left(\frac{\omega_0 z'}{c}\right) \frac{\bar{z}'}{|z'|} \end{bmatrix} \exp(-i\omega_0 t')$$

$$a_1 = [a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16}] = \left[ 0, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 1 \right]$$

$$a_2 = [a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{25}, a_{26}] = \left[ -i, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}i, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 0 \right]$$

とし内積を求めると

$$a_1^* \bullet a_1 = 3$$

$$a_1^* \bullet a_2 = 0$$

$$a_2^* \bullet a_2 = 3$$

$$a_2^* \bullet a_1 = 0$$

であるので

$$a_n^* \bullet a_m = 3\delta_{nm}$$

ただし  $\delta_{nm}$  はクロネッカーのデルタとし

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases} \quad n = 1, 2 \quad m = 1, 2$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\omega_0 x'}{c}\right) \frac{\bar{x}'}{|x'|} \\ \sin\left(\frac{\omega_0 x'}{c}\right) \frac{\bar{x}'}{|x'|} \\ \cos\left(\frac{\omega_0 y'}{c}\right) \frac{\bar{y}'}{|y'|} \\ \sin\left(\frac{\omega_0 y'}{c}\right) \frac{\bar{y}'}{|y'|} \\ \cos\left(\frac{\omega_0 z'}{c}\right) \frac{\bar{z}'}{|z'|} \\ \sin\left(\frac{\omega_0 z'}{c}\right) \frac{\bar{z}'}{|z'|} \end{bmatrix}$$

とすると

$$\frac{1}{l^3} \int_{x=0}^l \int_{y=0}^l \int_z^l b_n^T b_m dx' dy' dz' = \frac{1}{2} \delta_{nm}$$

$$\varphi_1 = a_1 b \exp(-i\omega_0 t')$$

$$\varphi_2 = a_2 b \exp(-i\omega_0 t')$$

$l$  を距離の分解能とし

$$l \gg \frac{c}{f}$$

とすると

$$\frac{1}{l^3} \int_{x=0}^l \int_{y=0}^i \int_z^l b^T a_n^{*T} a_m b dx' dy' dz'$$

$$= \frac{1}{l^3} \int_{x=0}^l \int_{y=0}^i \int_z^l [b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6] \begin{bmatrix} a_{n1}^* \\ a_{n2}^* \\ a_{n3}^* \\ a_{n4}^* \\ a_{n5}^* \\ a_{n6}^* \end{bmatrix} [a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}, a_{m4}, a_{m5}, a_{m6}] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{bmatrix} dx' dy' dz'$$

$$= \frac{1}{l^3} \int_{x=0}^l \int_{y=0}^i \int_z^l [b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6] \cdot \begin{bmatrix} a_{n1}^* a_{m1}, a_{n1}^* a_{m2}, \dots, a_{n1}^* a_{m6} \\ a_{n2}^* a_{m1}, a_{n2}^* a_{m2}, \dots, a_{n2}^* a_{m6} \\ \cdot \\ a_{n6}^* a_{m1}, a_{n6}^* a_{m2}, \dots, a_{n6}^* a_{m6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{bmatrix} dx' dy' dz'$$

$$= \frac{1}{l^3} \int_{x=0}^l \int_{y=0}^i \int_z^l [b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6] \cdot \begin{bmatrix} a_{n1}^* a_{m1} b_1 + a_{n1}^* a_{m2} b_2 + \dots + a_{n1}^* a_{m6} b_6 \\ a_{n2}^* a_{m1} b_1 + a_{n2}^* a_{m2} b_2 + \dots + a_{n2}^* a_{m6} b_6 \\ \cdot \\ a_{n6}^* a_{m1} b_1 + a_{n6}^* a_{m2} b_2 + \dots + a_{n6}^* a_{m6} b_6 \end{bmatrix} dx' dy' dz'$$

$$= \frac{1}{l^3} \int_{x=0}^l \int_{y=0}^i \int_z^l \begin{bmatrix} b_1 a_{n1}^* a_{m1} b_1 + b_1 a_{n1}^* a_{m2} b_2 + \dots + b_1 a_{n1}^* a_{m6} b_6 \\ + b_2 a_{n2}^* a_{m1} b_1 + b_2 a_{n2}^* a_{m2} b_2 + \dots + b_2 a_{n2}^* a_{m6} b_6 \\ \cdot \\ + b_6 a_{n6}^* a_{m1} b_1 + b_6 a_{n6}^* a_{m2} b_2 + \dots + b_6 a_{n6}^* a_{m6} b_6 \end{bmatrix} dx' dy' dz'$$

$$= \frac{1}{l^3} \int_{x=0}^l \int_{y=0}^i \int_z^l \begin{bmatrix} b_1 a_{n1}^* a_{m1} b_1 \\ + b_2 a_{n2}^* a_{m2} b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ + b_6 a_{n6}^* a_{m6} b_6 \end{bmatrix} dx' dy' dz' = \frac{1}{2} [a_{n1}^* a_{m1} + a_{n2}^* a_{m2} \dots + a_{n6}^* a_{m6}]$$

$$= \frac{1}{2} a_n^* \bullet a_m$$

$$= \frac{3}{2} \delta_{nm}$$

となる。

$E$  をエネルギー  $m$  を質量  $\vec{p}$  を運動量  
 $f_0$  を静止時の振動数  $f$  を運動時の振動数とすると

特殊相対論より

$$E = mc^2 \gamma$$

$$\vec{p} = m\vec{v} \gamma$$

$$f = f_0 \gamma$$

$h$  をプランク定数とすると量子力学より

$$E = hf = hf_0 \gamma$$

したがって  $f_0 = \frac{mc^2}{h}$  となって振動数は質量に比例し [非線形波動方程式の定在波解](#)  
と整合する。

$\omega_0$  を角周波数とすると

$$\omega_0 \gamma = 2\pi f_0 \gamma = 2\pi \frac{E}{h} = \frac{E}{\hbar}$$

$$\omega_0 \gamma \frac{\vec{v}}{c^2} = 2\pi f_0 \gamma \frac{\vec{v}}{c^2} = 2\pi \frac{mc^2}{h} \gamma \frac{\vec{v}}{c^2} = \frac{m\vec{v} \gamma}{\hbar} = \frac{\vec{p}}{\hbar}$$

$$\omega_0 t' = \omega_0 \gamma \left( t - \frac{\vec{v} \cdot \vec{x}}{c^2} \right) = \omega_0 t - \omega_0 \gamma \frac{\vec{v} \cdot \vec{x}}{c^2} = \frac{Et - \vec{p} \cdot \vec{x}}{\hbar}$$

となる。



特殊相対論より  $E$  の 2 乗を計算すると

$$\begin{aligned} E^2 &= m^2 c^4 \gamma^2 = m^2 c^4 \gamma^2 = m^2 c^4 \frac{1}{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}} \\ &= m^2 c^4 \left( \frac{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2} + \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}}{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}} \right) = m^2 c^4 \left( 1 + \frac{\frac{|\vec{v}|^2}{c^2}}{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}} \right) \\ &= m^2 c^4 + m^2 c^4 \left( \frac{\frac{|\vec{v}|^2}{c^2}}{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}} \right) = m^2 c^4 + m^2 c^2 \gamma^2 |\vec{v}|^2 \\ &= m^2 c^4 + c^2 p^2 \end{aligned}$$

ただし  $p = |\vec{p}|$

したがって

$$E^2 = m^2 c^4 + c^2 p^2$$

となる。

$\omega_1, \omega_2$  を複素数とし

$$\varphi = \begin{bmatrix} \omega_1 \varphi_1 \\ \omega_2 \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 a_1 b \\ \omega_2 a_2 b \end{bmatrix} \exp(-i\omega_0 t')$$

で示す定在波  $\varphi$  があるとする。

$\varphi$  から以下の演算を行ったものを  $\Phi$  とする。

$$\Phi = \frac{2}{3} \frac{1}{l^3} \int_{x=0}^l \int_{y=0}^l \int_z^l b^T \begin{bmatrix} a_1^{*T} & 0 \\ 0 & a_2^{*T} \\ \frac{c\sigma \cdot (-i\hbar\nabla)}{E + mc^2} \begin{bmatrix} a_1^{*T} & 0 \\ 0 & a_2^{*T} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \varphi dx' dy' dz'$$

ただし  $\frac{2}{3}$  はこの後出てくる式と係数を合わせるために入れてある。

$b^T$  は  $b$  の転置行列、 $a^{*T}$  は  $a$  の共役転置行列

これに前述の式も加えると

$$\Phi = \frac{2}{3} \frac{1}{l^3} \int_{x=0}^l \int_{y=0}^l \int_z^l b^T \begin{bmatrix} a_1^{*T} & 0 \\ 0 & a_2^{*T} \\ \frac{c\sigma \cdot (-i\hbar\nabla)}{E + mc^2} \begin{bmatrix} a_1^{*T} & 0 \\ 0 & a_2^{*T} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 a_1 b \\ \omega_2 a_2 b \end{bmatrix} \exp(-i\omega_0 t') dx' dy' dz'$$

$$= \frac{2}{3} \frac{1}{l^3} \int_{x=0}^l \int_{y=0}^l \int_z^l \begin{bmatrix} b^T \begin{bmatrix} a_1^{*T} a_1, 0 \\ 0, a_2^{*T} a_2 \end{bmatrix} b \\ \frac{c\sigma \cdot (-i\hbar\nabla)}{E + mc^2} b^T \begin{bmatrix} a_1^{*T} a_1, 0 \\ 0, a_2^{*T} a_2 \end{bmatrix} b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \exp\left(\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)\right) dx' dy' dz'$$

$$= \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \frac{3}{2}, 0 \\ 0, \frac{3}{2} \\ \frac{c\sigma \cdot \vec{p}}{E + mc^2} \begin{bmatrix} \frac{3}{2}, 0 \\ 0, \frac{3}{2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \exp\left(\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)\right) = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \frac{c\sigma \cdot \vec{p}}{E + mc^2} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \left(\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)\right)$$

$\omega_3, \omega_4$  を複素数とし

$$\begin{bmatrix} \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix} = \frac{c\sigma \cdot \vec{p}}{E + mc^2} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \quad \text{とすると}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix} \left(\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)\right)$$

となる。

$\Phi$  について時間  $t$  で微分すると

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix} \left(\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)\right) \right) = -\frac{i}{\hbar} E \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix} \left(\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)\right)$$

$\Phi$  について勾配をもとめると

$$\nabla\Phi = \nabla \left( \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix} \left( \frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{x} - Et) \right) \right) = \frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix} \left( \frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{x} - Et) \right)$$

$\sigma$  をパウリのスピン行列とし

$$\sigma = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z] = \left[ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right]$$

とすると

$$\begin{aligned} (c\sigma \cdot \vec{p})^2 &= c^2 \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 p_x^2 + \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}^2 p_y^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^2 p_z^2 \right) \\ &= c^2 \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} p_x^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} p_y^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} p_z^2 \right) \\ &= c^2 p^2 \end{aligned}$$

$\Phi$  に対して行列  $\begin{bmatrix} mc^2 & c\sigma \cdot (-i\hbar\nabla) \\ c\sigma \cdot (-i\hbar\nabla) & -mc^2 \end{bmatrix}$  を積算すると

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} mc^2 & c\sigma \cdot (-i\hbar\nabla) \\ c\sigma \cdot (-i\hbar\nabla) & -mc^2 \end{bmatrix} \Phi &= \begin{bmatrix} mc^2 & c\sigma \cdot \vec{p} \\ c\sigma \cdot \vec{p} & -mc^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix} \exp\left(\frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)\right) \\ &= \begin{bmatrix} mc^2 \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} + c\sigma \cdot \vec{p} \begin{bmatrix} \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix} \\ c\sigma \cdot \vec{p} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} - mc^2 \begin{bmatrix} \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \exp\left(\frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} mc^2 \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} + c\sigma \cdot \vec{p} \frac{c\sigma \cdot \vec{p}}{E + mc^2} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \\ c\sigma \cdot \vec{p} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} - mc^2 \frac{c\sigma \cdot \vec{p}}{E + mc^2} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \exp\left(\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)\right) \\
&= \begin{bmatrix} \left( mc^2 + \frac{c^2 p^2}{E + mc^2} \right) \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \\ (c\sigma \cdot \vec{p}) \left( 1 - \frac{mc^2}{E + mc^2} \right) \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \exp\left(\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)\right) \\
&= \begin{bmatrix} \left( \frac{Emc^2 + m^2 c^4 + c^2 p^2}{E + mc^2} \right) \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \\ (c\sigma \cdot \vec{p}) \left( \frac{E}{E + mc^2} \right) \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \exp\left(\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)\right) \\
&= \begin{bmatrix} \left( \frac{Emc^2 + E^2}{E + mc^2} \right) \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \\ \frac{(c\sigma \cdot \vec{p})E}{E + mc^2} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \exp\left(\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)\right) \\
&= \begin{bmatrix} E \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \\ E \begin{bmatrix} \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \exp\left(\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)\right) = E \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix} \exp\left(\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)\right) \\
&= i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t}
\end{aligned}$$

したがって

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \begin{bmatrix} mc^2 & c\sigma \cdot \vec{p} \\ c\sigma \cdot \vec{p} & -mc^2 \end{bmatrix} \Phi$$

となってディラック方程式と一致する。

使用した公式

$$\cos(A) - \sin(A) = -\sqrt{2} \sin\left(A - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin(A) + \cos(A) = \sqrt{2} \sin\left(A + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin(A \pm B) = \sin(A)\cos(B) \pm \cos(A)\sin(B)$$

$$\exp(i\theta) = \cos(\theta) + i(\sin(\theta))$$