

# 一般相対論と整合する非線形条件

2016年7月24日

長井鉄也

## 1. 概要

2016年3月に電位（スカラーポテンシャル）に依存して決定される非線形関数を用いた球面波解を考え紹介した。しかしローレンツ不変性や一般相対論との整合性が説明出来ていなかった。

そこで一般相対論のリッチテンソルと電磁エネルギーの関係について注目し強い電磁場中で電磁波が持つ非線形性により電磁場の定在波解が存在するのではないかと考えて数値解を探してみた。

## 2. 定在波解

以下のような解を考える。

$\phi$  をスカラーポテンシャル

$r$  を半径

$\omega$  をコンプトン波長に相当する周波数

$c$  を光速

$t$  を時間

$\phi_0$  を振幅を表す定数

$\phi_n$  をランダムノイズの大きさを表す定数

$E$  を電界強度の半径方向の大きさ

とし

原点を中心に粒子を形成するスカラーポテンシャルの定在波があるとし、その中心付近では強い電磁場のために非線形になっているが周辺の線系領域では以下の球面定在波になっているとする。

$$\phi = \frac{\phi_0}{r} \cos\left(\frac{\omega r}{c}\right) \exp(i\omega t) + \phi_n \quad (1)$$

ただし  $\phi_n$  はランダムノイズ

従って

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\phi_0}{r} \cos\left(\frac{\omega r}{c}\right) \exp(i\omega t) + \phi_n = \frac{\phi_0}{r} \left( \cos\left(\frac{\omega r}{c}\right) \right) (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) + \phi_n \\ &= \frac{\phi_0}{r} \left( \cos\left(\frac{\omega r}{c}\right) \cos(\omega t) \right) + i \frac{\phi_0}{r} \left( \cos\left(\frac{\omega r}{c}\right) \sin(\omega t) \right) + \phi_n \end{aligned} \quad (2)$$

この勾配によって電界強度がもとまるので

$$E = \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{\phi_0}{r^2} \cos\left(\frac{\omega r}{c}\right) \exp(i\omega t) + \left(\frac{\omega}{c}\right) \frac{\phi_0}{r} \cos\left(\frac{\omega r}{c}\right) \exp(i\omega t) + \nabla \phi_n \quad (3)$$

$$|E|^2 = \frac{\phi_0^2}{2r^4} + \left(\frac{\omega^2}{c^2}\right) \frac{\phi_0^2}{2r^2} + |\nabla \phi_n|^2 \quad (4)$$

非線形領域と線系領域を含む全領域で

$\phi_p$  をスカラーポテンシャルの振幅とし

$$\phi = \phi_p \exp(-i\omega t) + \phi_n \quad (5)$$

とすると

$$E = \frac{\partial \phi_p}{\partial r} \exp(-i\omega t) + \nabla \phi_n \quad (6)$$

$$|E|^2 = \left| \frac{\partial \phi_p}{\partial r} \right|^2 + |\nabla \phi_n|^2 \quad (7)$$

線系領域では

$$\phi_p = \frac{\phi_0}{r} \cos\left(\frac{\omega r}{c}\right) \quad (8)$$

### 3. 一般相対論による非線形条件

ここで一般相対論のリッチテンソルと電磁エネルギーの関係について調べることにする。

「一般相対性理論」 内山龍雄著 より

$A^\lambda$  は4元ポテンシャル

$j^\lambda$  は4元電流密度

$E^{\mu\nu}$  は電磁場のエネルギーテンソル密度

$T^{\mu\nu}$  はエネルギーテンソル密度

$R^{\mu\nu}$  はリッチテンソル

$G$  は万有引力定数

$$\square A^\lambda + R^\lambda_\rho A^\rho = -\mu_0 j^\lambda \quad (19.25) \text{ p115}$$

$$E^0_0 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 |E|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |B|^2 \quad \text{p114}$$

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \kappa T^{\mu\nu} \quad (21.8) \text{ p123}$$

$$-R = \kappa T \quad (21.10) \text{ p124}$$

$$\kappa = \frac{8\pi}{c^4} G \quad (21.9) \text{ p123}$$

$$T^{00} = -\rho c^2 \quad \text{p126}$$

$$T \cong \rho c^2 \quad \text{p126}$$

以上文献終わり

弱い重力場を想定して  $g^{00} \cong -1$  と近似して

$$T^{00} = E^{00} = -E^0_0$$

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \kappa T = \kappa T^{\mu\nu}$$

$$R^{00} - \frac{1}{2} \kappa T = R^{00} + \frac{1}{2} \kappa T^{00} = -\kappa T^{00}$$

$$R^{00} = -\frac{1}{2} \kappa T^{00} = -\frac{1}{2} \frac{8\pi}{c^4} G E^{00} = \frac{1}{2} \frac{8\pi}{c^4} G E^0_0 = \frac{1}{2} \frac{8\pi}{c^4} G \left( \frac{1}{2} \varepsilon_0 |E|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |B|^2 \right)$$

$$= \frac{4\pi}{c^4} G \left( \frac{1}{2} \varepsilon_0 |E|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |B|^2 \right)$$

$$R_0^0 = g_{0\nu} R^{0\nu} = -R^{00}$$

縦波とし  $B=0$  とし

$j^\lambda = 0$  として

$$\square A^0 = -R^\lambda{}_\rho A^\rho = R^{00} A^0 = \frac{4\pi}{c^4} G \left( \frac{1}{2} \varepsilon_0 |E|^2 \right) A^0$$

$\phi = A^0$  とし

$$\frac{\square \phi}{\phi} = \frac{2\pi}{c^4} G(\varepsilon_0 |E|^2) \quad (9)$$

となってスカラーポテンシャルの非線形性を示すダランベルジャンは電界強度の2乗に比例する。

ただしダランベルジャンは  $\square \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$

$\frac{\square \phi}{\phi} = -K |E|^2$  とすると

$$K = \frac{2\pi G \varepsilon_0}{c^4} \quad (10)$$

#### 4. 定在波解の数値解

(5) (9) より

$$\begin{aligned}\square\phi &= \square(\phi_p \exp(-i\omega t) + \phi_n) = \left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (\phi_p \exp(-i\omega t) + \phi_n) \\ &= \nabla^2(\phi_p \exp(-i\omega t) + \phi_n) + \frac{\omega^2}{c^2} (\phi_p \exp(-i\omega t) + \phi_n)\end{aligned}\quad (11)$$

$$\square\phi = -K|E|^2(\phi_p \exp(-i\omega t) + \phi_n) = -K \left( \left| \frac{\partial \phi_p}{\partial r} \right|^2 + |\nabla \phi_n|^2 \right) (\phi_p \exp(-i\omega t) + \phi_n) \quad (12)$$

複素フーリエ変換により

(11) より

$$\begin{aligned}\frac{\omega}{2\pi} \int_{t'-t}^{t+\frac{2\pi}{\omega}} \square\phi \exp(i\omega t') dt' &= \frac{\omega}{2\pi} \int_{t'-t}^{t+\frac{2\pi}{\omega}} \square(\phi_p \exp(-i\omega t') + \phi_n) \exp(i\omega t') dt' = \frac{\omega}{2\pi} \int_{t'-t}^{t+\frac{2\pi}{\omega}} \left( \nabla^2 \phi_p + \frac{\omega^2}{c^2} \phi_p \right) dt' \\ &= \nabla^2 \phi_p + \frac{\omega^2}{c^2} \phi_p\end{aligned}$$

(12) より

$$\begin{aligned}\frac{\omega}{2\pi} \int_{t'-t}^{t+\frac{2\pi}{\omega}} \square\phi \exp(i\omega t') dt' &= \frac{\omega}{2\pi} \int_{t'-t}^{t+\frac{2\pi}{\omega}} -K|E|^2(\phi_p \exp(-i\omega t') + \phi_n) \exp(i\omega t') dt' \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \int_{t'-t}^{t+\frac{2\pi}{\omega}} -K \left( \left| \frac{\partial \phi_p}{\partial r} \right|^2 + |\nabla \phi_n|^2 \right) (\phi_p \exp(-i\omega t') + \phi_n) \exp(i\omega t') dt' \\ &= -K \left( \left| \frac{\partial \phi_p}{\partial r} \right|^2 + |\nabla \phi_n|^2 \right) \phi_p\end{aligned}$$

したがって

$$\nabla^2 \phi_p + \frac{\omega^2}{c^2} \phi_p = -K \left( \left| \frac{\partial \phi_p}{\partial r} \right|^2 + |\nabla \phi_n|^2 \right) \phi_p \quad (13)$$

極座標上でのラプラシアンは  $\nabla^2 \phi_p = \frac{\partial^2 \phi_p}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi_p}{\partial r}$  であるので

$$\frac{\partial^2 \phi_p}{\partial r^2} = -\frac{2}{r} \frac{\partial \phi_p}{\partial r} - \frac{\omega^2}{c^2} \phi_p - K \left( \left| \frac{\partial \phi_p}{\partial r} \right|^2 + |\nabla \phi_n|^2 \right) \phi_p \quad (14)$$

ここで線系と非線形の概略の境界をとる半径  $r$  を求めることにする。

(14) より  $\left| K \left| \frac{\partial \phi_p}{\partial r} \right|^2 \phi_p \right| = \left| \frac{\omega^2}{c^2} \phi_p \right|$  程度になる  $r$  の概算値を求める

$$K \left| \frac{\partial \phi_p}{\partial r} \right|^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

線系時の式を適用し

$$\frac{\omega}{c} \ll r \text{ において}$$

$$\left| \frac{\partial \phi_p}{\partial r} \right| = \left| \frac{\partial \left( \frac{\phi_0}{r} \exp \left( i \frac{\omega r}{c} \right) \right)}{\partial r} \right| \cong \frac{\omega \phi_0}{c r}$$

であるので

$$K \frac{\omega^2 \phi_0^2}{c^2 r^2} = \frac{\omega^2}{c^2}$$

このときの半径を  $r_0$  とし

$$r_0^2 = K \phi_0^2$$

$$r_0 = \phi_0 \sqrt{K} \quad (15)$$

となって線系と非線形の概略の境界  $r_0$  が求められた。

この境界  $r_0$  がコンプトン波長の  $\frac{1}{k_r}$  とし

ただし  $k_r$  は定数

$$r_0 = \frac{2\pi c}{\omega k_r} \quad (16)$$

$$\phi_0 = \frac{r_0}{\sqrt{K}} \quad (17)$$

となって  $k_r$  を決定するとスカラーポテンシャルの振幅  $\phi_0$  が得られるので調整パラメータの一つを無次元化できる。

(14) 式を差分方程式に変換し

$$\frac{\partial \phi_p(r - \Delta r)}{\partial r} = \frac{\partial \phi_p(r)}{\partial r} - \frac{\partial^2 \phi_p(r)}{\partial r^2} \Delta r \quad (18)$$

$$\phi_p(r - \Delta r) = \phi_p(r) - \frac{\partial \phi_p(r)}{\partial r} \Delta r \quad (19)$$

この式により表計算ソフトを使って  $\phi_p$  の曲線をグラフに描かせた。

試行錯誤により  $k_r$  と  $|\nabla\phi_n|^2$  を調整し  $k_r = 1.75$   $|\nabla\phi_n|^2 = 3.5 \times 10^{75}$  にしたところ

半径=0 で解が収束することが分かった。

図 1 は横軸が半径、上段がスカラーポテンシャルの線系な場合と非線形な場合  
下段が電界強度の 2 乗で非線形性の強さを示す。

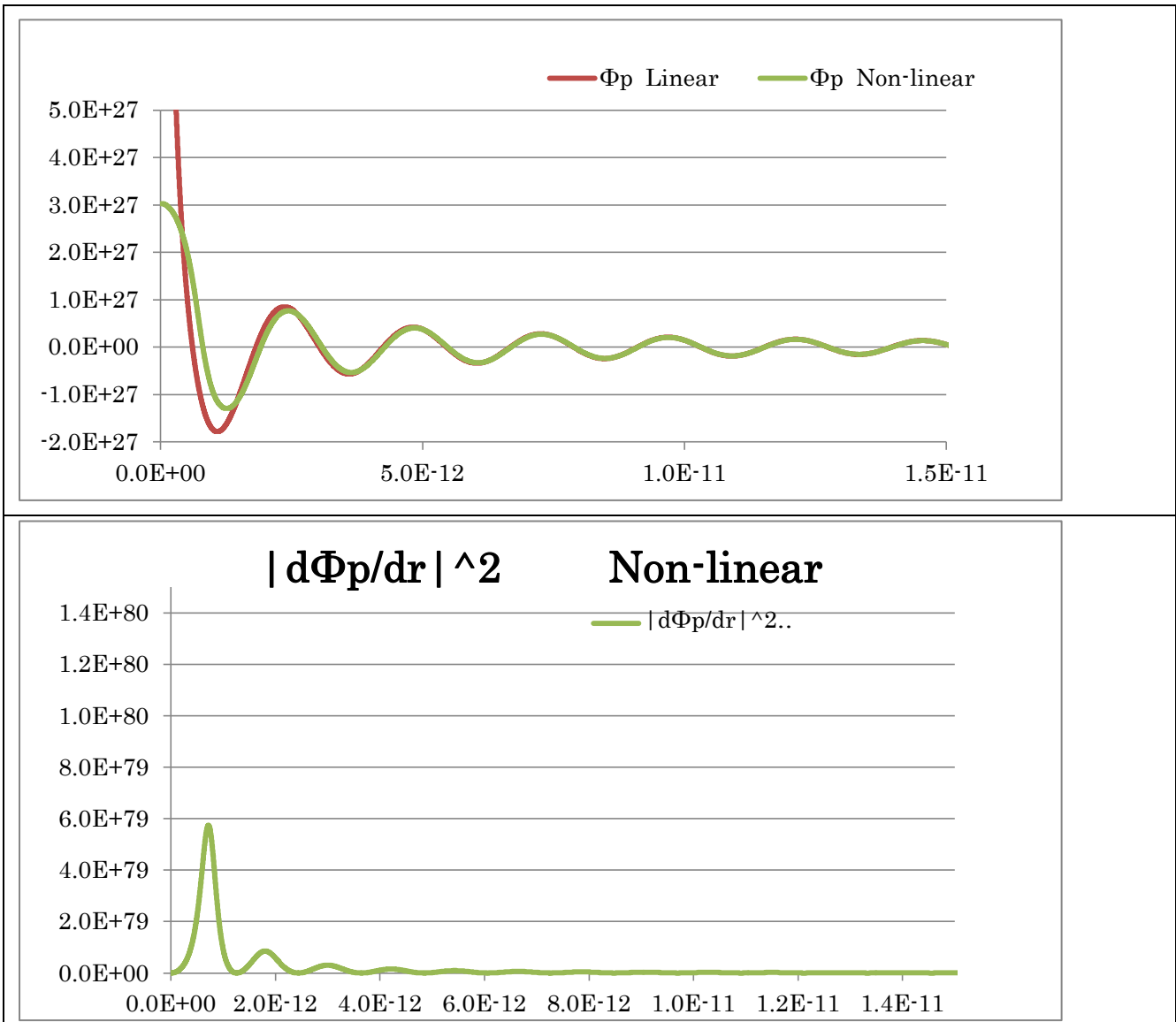


図 1. 収束解  $k_r = 1.75$   $|\nabla\phi_n|^2 = 3.5 \times 10^{75}$

$|\nabla\phi_n|^2 = 0$ では半径  $r$  がゼロに近づくと発散してしまい  $k_r$  を調整しても解を発見することは出来なかった。(図2)

このことからランダムノイズ  $\phi_n$  は粒子の発生と寿命に大きな影響を与えると推測出来る。

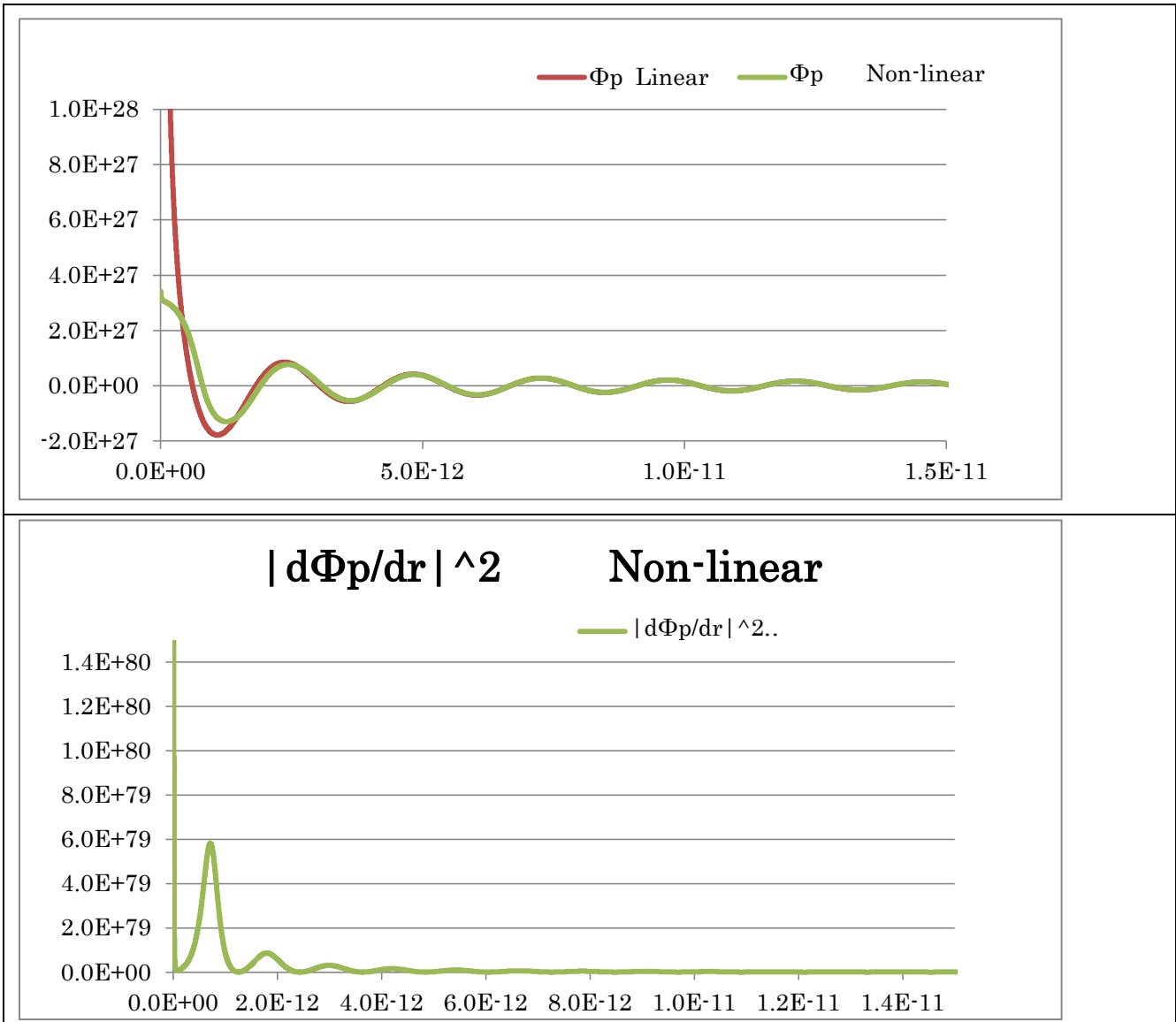


図2 非収束解  $k_r = 1.75$   $|\nabla\phi_n|^2 = 0$



## 5. 結論

一般相対論のリッチテンソルが電磁エネルギーに依存することで強い電磁場に非線形性が発生し、これにより電磁場の定在波解が存在し得ることが分かった。

この解には電磁場ノイズの存在が重要な要因になっていることが分かった。

## 6. 今後の検討事項

ここで得られた定在波解が素粒子である可能性を検討している。

ここでは単純化のため定在波解としたが中心から外に向かう進行波解もあると考え探している。

ランダムノイズ  $\phi_n$  は複数の粒子群の周辺にも発生すると思われ、完全なランダムではなく周波数スペクトルを持っている可能性もある。それが宇宙全体に充満している可能性もあり新たに発生する粒子はこのノイズのスペクトルの影響を受けるため、初期宇宙の段階で粒子群の固有振動数や電荷が一度決定されるとそれ以降発生する粒子の固有振動や電荷もそれに限定される可能性もあると考えている。

大きな粒子群の周りにはランダムノイズ  $\phi_n$  の勾配ができるためそれが重力場の実態である可能性もある。このランダムノイズ  $\phi_n$  自身にもエネルギー密度があり重力場の発生源となり得るが全宇宙に平均的に分布しているのでそれによって発生する重力は打ち消されて観測されない。

半径を無限大の範囲にとると定在波の電磁エネルギーの合計値は無限大になり質量も無限大になってしまいが半径が大きくなると周囲の他の粒子から出るノイズに紛れてしまうため質量は限定されるのではないだろうか？