存在確率が波動関数の2乗に比例する理由

長井鉄也

速度 v_0 で等速運動している系をひとつの一次元の静止系として考える。その静止系において時間 τ 秒毎に $\pm\Delta P$ の運動量外乱があり、その方向はランダムで $\pm$ 平等の確率とする。

Δv:速度変化量

m:質量として

$$m\Delta v = \Delta P$$

$$\Delta v = \frac{\Delta P}{m}$$

この静止系において Larmor の公式が適応できるとして運動量外乱を受けた後の速度の変化を考える。

α:加速度

k_v:係数

$< v >$:平均速度

とし

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}m < v >^2\right) = -k_v\alpha^2$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(< v >^2\right) = -\frac{2k_v\alpha^2}{m}$$

これを時間で積分し、

$$< v >^2 = (\Delta v)^2 - \frac{2k_v\alpha^2 t}{m}$$

となって平均速度は減衰する。運動量外乱を受けてから平均速度がゼロになるまでの時間を T_1 とすると

$$T_1 = \frac{m(\Delta v)^2}{2k_v\alpha^2}$$

l:平均自由行程とすると

$$l = \int_0^{T_1} < v > dt = \int_0^{T_1}\left((\Delta v)^2 - \frac{2k_v\alpha^2 t}{m}\right)^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \frac{m(\Delta v)^3}{3k_v\alpha^2}$$

格子間隔 l の一次元格子を考える
$W_l(n,t)$:時間 t,n 番目の格子点に存在する確率とすると拡散方程式より

$$\frac{\partial W_l(n,t)}{\partial t} = \frac{l^2}{2\tau}\frac{\partial^2 W_l(n,t)}{\partial n^2}$$

定常解を求めると

$$\frac{\partial W_l(n,t)}{\partial t} = 0$$

であるので

$$W_l(n,t) = const$$

$W_l(n,t) = W_{l0}$ とすると
$W(x,t)$:時間 t, 位置 x での単位距離当りの存在確率とすると

$$W(x,t) = \frac{W_{l0}}{l} = \frac{3W_{l0}k_v\alpha^2}{m(\Delta v)^3}$$

ψ:波動関数
k_α:比例定数
$\alpha = k_\alpha\psi$ とすると

$$W(x,t) = \frac{3W_{l0}k_v k_\alpha^2\psi^2}{m(\Delta v)^3}$$

となり存在確率は波動関数の 2 乗に比例する。