非線形波動方程式の球状の振動解

長井鉄也

2009 年 8 月 16 日

非線形波動方程式の球状の定常解に適当な偏差を加算したものを初期値として、その後の時間経過による変化をシミュレーションします。

極座標において

$$\mathrm{E_{DC}}(\mathrm{r}) = [E_{DCr}(\mathrm{r}), E_{DC\theta}(\mathrm{r}), E_{DC\varphi}(\mathrm{r})]$$

$E_{DC\theta}(\mathrm{r}) = 0$、　$E_{DC\varphi}(\mathrm{r}) = 0$ とすると

$$(\nabla^2 \mathrm{E_{DC}}(\mathrm{r})) \bullet \frac{\mathrm{r}}{|\,\mathrm{r}\,|} = (grad(div(\mathrm{E_{DC}}(\mathrm{r})))) \bullet \frac{\mathrm{r}}{|\,\mathrm{r}\,|}$$

$$= -\frac{2}{r^2} E_{DCr}(\mathrm{r}) + \left(\frac{2}{r}\right) \frac{\partial E_{DCr}(\mathrm{r})}{\partial r} + \frac{\partial^2 E_{DCr}(\mathrm{r})}{\partial r^2}$$

となります。

「非線形波動方程式の 3 次元定常解の関係式」より

$K_1 = k_0 \sqrt{\frac{2\Delta c}{c_0}}$ とし

$$\frac{\partial^2 E_{DCr}(\mathrm{r})}{\partial t^2} = c_0^2 \left(\frac{K_1^2}{3} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{(E_1 - E_{DCr}(\mathrm{r}))^2}{2\sigma^2} \right) + (\nabla^2 \mathrm{E_{DC}}(\mathrm{r})) \bullet \frac{\mathrm{r}}{|\,\mathrm{r}\,|} \right)$$

$$\frac{\partial E_{DCr}(\mathrm{r})}{\partial t} = \int_0^t \frac{\partial^2 E_{DCr}(\mathrm{r})}{\partial t^2} dt + \frac{\partial E_{DCr}(\mathrm{r})}{\partial t} \mid (t=0)$$

$$E_{DCr}(\mathrm{r}) = \int_0^t \frac{\partial E_{DCr}(\mathrm{r})}{\partial t} dt + E_{DCr}(\mathrm{r}) \mid (t=0)$$

以上の計算を dr を Δr に置き換えて差分法により計算します。

このとき初期値 $E_{DCr}(\mathrm{r}) \mid (t=0)$ については

「非線形波動方程式の球状の定常解」で求めた定常解に以下のガウス型の偏差 $\triangle E$ を加えたものを初期値として使用します。

E_{max}:偏差最大値

r_{in}:球状の定常解の内郭の半径

r_{out}:球状の定常解の外郭の半径

r_{cent}:球状の定常解の外郭と内郭の半径の平均

δ_r:標準偏差とします。

$$\triangle E = \triangle E_{max} exp\left(\frac{-(r - r_{cent})^2}{\delta_r^2}\right)$$

$$r_{cent} = \frac{r_{out} + r_{in}}{2}$$

—-にシミュレーション結果が格納されています。

——の「animation」シートの Animation ボタンをクリックしさらに Start ボタンをクリックすると

振動の様子がアニメーションで確認できます。

r_{cent} での振動を時系列に示したものが下のグラフです。

これをフーリエ変換してスペクトルを求めました。

ピークの振動数は $1.14 * 10^{24} [Hz]$　となりました。

ここで振動数の概算値を別の方法で推定してみることにします。

$r = r_{cent}$ 近傍にて

$$\mid \frac{K_1^2}{3} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{(E_1 - E_{DCr}(\mathrm{r}))^2}{2\sigma^2}\right) \mid >> \mid (\nabla^2 \mathrm{E_{DC}}(\mathrm{r})) \bullet \frac{\mathrm{r}}{\mid \mathrm{r} \mid}) \mid$$

と概略的にみなせるとします。

E_{DCmax}:振動の振幅

f_v:振動数

とし

$$E_{DCr}(\mathrm{r}) = E_{DCmax} cos(2\pi f_v t) + E_{DCr}(\mathrm{r}) \mid (t = 0)$$

とすると

$r = r_{cent}$ にて

$$f_v = \sqrt{-\frac{\partial}{\partial E_{DC}} \left(\frac{\partial^2 E_{DCr}(\mathrm{r})}{\partial t^2}\right)}$$

$$= \sqrt{c_0^2 \left(\frac{K_1^2}{3} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{(E_{DCr}(\mathrm{r}) - E_1)}{\sigma^2}\right) exp\left(-\frac{(E_{DCr}(\mathrm{r}) - E_1)^2}{2\sigma^2}\right)\right)}$$

$$= 1.20 * 10^{24} [Hz]$$

これに対してシミュレーションした結果をフーリエ解析して求めた振動数が $1.14 * 10^{24} [Hz]$ であることから、この推定がある程度妥当だと言えます。