非線形波動方程式の電荷の無い球状の定常解

長井鉄也

$\frac{\mathrm{E_{DC}(r))}}{|\mathrm{E_{DC}(r))}|}$ は r に関わらず任意の一方向とする。
$f =| E_{DC} |$ とすると

$$\nabla^2 \mathrm{E_{DC}(r)} = \nabla^2 f \frac{\mathrm{E_{DC}(r))}}{| \mathrm{E_{DC}(r))} |}$$

極座標において

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) = \frac{1}{r^2}\left(2r\frac{\partial f}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right)$$

$$= \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$$

となります。これより

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = -\frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \nabla^2 f$$

となります。
線形領域において
$f = \frac{K_2}{r}$
K_2:定数とすると

$$\frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{K_2}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = 2\frac{K_2}{r^3}$$

$$\nabla^2 f = \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = -\frac{2K_2}{r^3} + \frac{2K_2}{r^3} = 0$$

r_1：積分開始点
として
$r = r_1$ において

$$f = \frac{K_2}{r_1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{K_2}{r_1^2}$$

となるので $dr < 0$ として r_1 を開始点にして外側から積分し

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \int_{r_1}^{r} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} dr - \frac{K_2}{r_1^2}$$

$$= \int_{r_1}^{r} \left(-\frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \nabla^2 f \right) dr - \frac{K_2}{r_1^2}$$

となって E_{DC} の勾配が求まります。
これをさらに積分すると

$$f = \int_{r_1}^{r} \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{K_2}{r_1}$$

となって f が求まります。
ただし「非線形波動方程式の３次元定常解の関係式」より

$$\nabla^2 f = (\nabla^2 \mathrm{E_{DC}(r)}) \bullet \frac{\mathrm{E_{DC}(r))}}{\mid \mathrm{E_{DC}(r))} \mid} = -\frac{2\Delta c k_0^2}{3c_0} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} exp \left(-\frac{(E_1 - E_{DC}(\mathrm{r}, r))^2}{2\sigma^2} \right)$$

$$= -\frac{K_1^2}{3} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} exp \left(-\frac{(E_1 - E_{DC}(\mathrm{r}, r))^2}{2\sigma^2} \right)$$

$$K_1 = k_0 \sqrt{\frac{2\Delta c}{c_0}}$$

以上の計算を dr を Δr に置き換えて差分法により計算します。