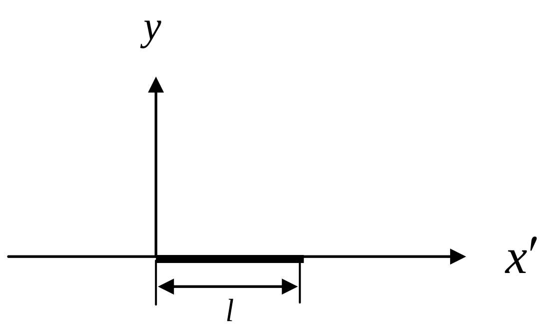
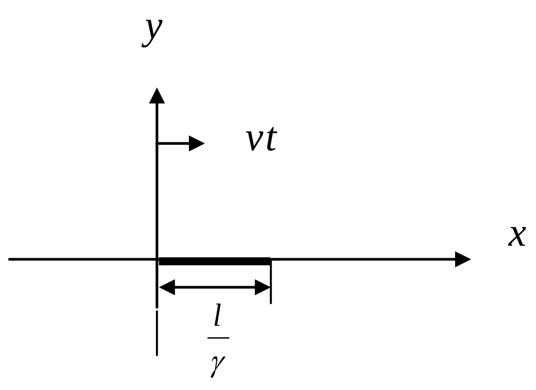
定在波からのクライン・ゴルドン方程式の導出[一次元:簡易版]

長井鉄也

x の方向に向かって速度 v で移動する系を考える。
この系の中に非線形波動方程式の定在波解があるとする。
定在波をこの系から見たときは以下のようになる。
ただし l は一波長分の長さ



定在波を静止系から見ると以下のようになる。



ローレンツ変換により

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

ただし

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

E を定在波とし

$$E = f(x', y\ )\cos(\omega t')\cos\left(\frac{\omega x'}{c}\right)$$

とするがここでは近似的に $f(x', y) = f_0$　　　f_0 は定数とし

$$E = f_0 \cos(\omega t')\cos\left(\frac{\omega x'}{c}\right)$$

とする。

定在波 E にフーリエ変換を行い $\cos\left(\frac{\omega x'}{c}\right)$ の係数を取りだしたものを Ψ_G とする。

$$\Psi_G = \frac{\omega}{\pi}\int_{x'=-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} E\cos\left(\frac{\omega x'}{c}\right)dx' = f_0 \cos(\omega t')$$

$$= f_0 \cos\left(\omega\gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)\right)$$

$$= f_0 \cos\left(\omega\gamma t - \frac{\omega\gamma x}{c}\left(\frac{v}{c}\right)\right)$$

したがって

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi_G}{\partial t^2}+\nabla^2\Psi_G=\left(\frac{1}{c^2}\omega^2\gamma^2-\frac{\omega^2\gamma^2}{c^2}\frac{v^2}{c^2}\right)\Psi_G$$

$$=\frac{\omega^2}{c^2}\gamma^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\Psi_G=\frac{\omega^2}{c^2}\left(\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)\Psi_G=\frac{\omega^2}{c^2}\Psi_G$$

となる。

h はプランク定数　f は振動数　m は質量とし

$$\omega=2\pi f=2\pi\frac{mc^2}{h}=\frac{mc^2}{\hbar}$$ とすると

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi_G}{\partial t^2}+\nabla^2\Psi_G=\frac{1}{c^2}\frac{m^2c^4}{\hbar^2}\Psi_G=\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\Psi_G$$

となるので

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi_G}{\partial t^2}+\nabla^2\Psi_G=\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\Psi_G$$

となってクライン・ゴルドン方程式と一致する。