非線形波動方程式の球状の定常解

長井鉄也

2009 年 10 月 18 日

A spherical steady solution of the non-linear wave equation

Testuya Nagai

2009-Oct-18

極座標において

$$\mathrm{E_{DC}}(\mathrm{r}) = [E_{DCr}(\mathrm{r}), E_{DC\theta}(\mathrm{r}), E_{DC\varphi}(\mathrm{r})]$$

$E_{DC\theta}(\mathrm{r}) = 0$、　$E_{DC\varphi}(\mathrm{r}) = 0$ とすると

$$div\mathrm{E_{DC}}(\mathrm{r}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 E_{DCr}(\mathrm{r})) = \frac{2}{r}E_{DCr}(\mathrm{r}) + \frac{\partial}{\partial r}(E_{DCr}(\mathrm{r}))$$

となるので
$rot\mathrm{E_{DC}}(\mathrm{r}) = 0$ とすると

$$(\nabla^2 \mathrm{E_{DC}}(\mathrm{r})) \bullet \frac{\mathrm{r}}{|\,\mathrm{r}\,|} = (grad(div(\mathrm{E_{DC}}(\mathrm{r})))) \bullet \frac{\mathrm{r}}{|\,\mathrm{r}\,|}$$

$$= -\frac{2}{r^2}E_{DCr}(\mathrm{r}) + \left(\frac{2}{r}\right)\frac{\partial E_{DCr}(\mathrm{r})}{\partial r} + \frac{\partial^2 E_{DCr}(\mathrm{r})}{\partial r^2}$$

となります。これより

$$\frac{\partial^2 E_{DCr}(\mathrm{r})}{\partial r^2} = \nabla^2 \mathrm{E_{DC}}(\mathrm{r}) + \frac{2}{r^2}E_{DCr}(\mathrm{r}) - \left(\frac{2}{r}\right)\frac{\partial E_{DCr}(\mathrm{r})}{\partial r}$$

となります。
ε_0：真空の誘電率
e_p：素電荷
r_p：陽子の半径
として

$$E_1 \simeq \frac{e_p}{4\pi\varepsilon_0 r_p^2}$$

となるので
r_1：積分開始点

$r_1 >> r_p$
として
$r = r_1$ において

$$E_{DCr}(\mathrm{r}) = \frac{e_p}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}$$

$$\frac{\partial E_{DCr}(\mathrm{r})}{\partial r} = -\frac{e_p}{2\pi\varepsilon_0 r_1^3}$$

となるので $dr < 0$ として r_1 を開始点にして外側から積分し

$$\frac{\partial E_{DCr}(\mathrm{r})}{\partial r} = \int_{r_1}^{r} \frac{\partial^2 E_{DCr}(\mathrm{r})}{\partial r^2} dr - \frac{e_p}{2\pi\varepsilon_0 r_1^3}$$

$$= \int_{r_1}^{r} \left((\nabla^2 \mathrm{E_{DC}}(\mathrm{r})) \bullet \frac{\mathrm{r}}{|\mathrm{\ r\ }|} + \frac{2}{r^2} E_{DCr}(\mathrm{r}) - \left(\frac{2}{r}\right) \frac{\partial E_{DCr}(\mathrm{r})}{\partial r} \right) dr$$

$$-\frac{e_p}{2\pi\varepsilon_0 r_1^3}$$

となって E_{DC} の勾配が求まります。
これをさらに積分すると

$$E_{DCr}(\mathrm{r}) = \int_{r_1}^{r} \frac{\partial E_{DCr}(\mathrm{r})}{\partial r} dr + \frac{e_p}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}$$

となって E_{DC} が求まります。
ただし「非線形波動方程式の３次元定常解の関係式」より

$$(\nabla^2 \mathrm{E_{DC}}(\mathrm{r})) \bullet \frac{\mathrm{r}}{|\mathrm{\ r\ }|} = -\frac{2\Delta c k_0^2}{3c_0} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{(E_1 - E_{DCr}(\mathrm{r}))^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$= -\frac{K_1^2}{3} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{(E_1 - E_{DCr}(\mathrm{r}))^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$K_1 = k_0 \sqrt{\frac{2\Delta c}{c_0}}$$

以上の計算を dr を Δr に置き換えて差分法により計算します。