非線形波動方程式の３次元定常解の関係式

長井鉄也

2009 年 10 月 18 日

A related expression of the three-dimensional steady solution of the non-linear wave equation

Testuya Nagai

2009-Oct-18

r を位置ベクトルとし
r $= [x, y, z]$ とします。
E(r) を位置 r での電界のベクトルとし

$$\mathrm{E(r)} = [E_x(\mathrm{r}), E_y(\mathrm{r}), E_z(\mathrm{r})]$$

とします。
ここで常識には反しますが真空で $div\mathrm{E(r)}$ は値を持つとします。
通常、$div\mathrm{E(r)}$ が真空中で観測されないのは、
日常の空間ではほぼ線形なので波動方程式に従い電荷が光速で拡散してしまうためと考えます。
c：光速
t：時間
とし電界は次の波動方程式に従うとします。

$$\frac{\partial^2 \mathrm{E(r)}}{\partial t^2} = c^2\nabla^2(\mathrm{E(r)}) = c^2 grad(div(\mathrm{E(r)})) - c^2 rot(rot(\mathrm{E(r)}))$$

$$= c^2 div(grad(\mathrm{E(r)}))$$

ただし $grad(\mathrm{E(r)})$ は 2 階のテンソルです。
$\mathrm{E_{DC}(r)}$：電界のベクトルの直流分
T：積分範囲
$EX[\ ]$：[ ] 内の期待値とし

$$\mathrm{E_{DC}(r)} = [E_{DCx}(\mathrm{r}), E_{DCy}(\mathrm{r}), E_{DCz}(\mathrm{r})] = EX[\mathrm{E(r)}] = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\mathrm{E(r)})dt$$

とします。

$\mathrm{E_{AC}(r)}$：電界のベクトルの交流分で低域通過ガウスノイズとします。

$$\mathrm{E(r)} = \mathrm{E_{AC}(r)} + \mathrm{E_{DC}(r)}$$

$i = x, y, z$
ω：周波数 [rad/s]
ω_0：最大周波数
$\frac{1}{\omega_0} << T$
k:波数（空間周波数)[rad/m]
$k = \frac{\omega}{c}$
k_0:最大波数（空間周波数)[rad/m]
$k_0 = \frac{\omega_0}{c}$
p：伝播方向ベクトル
$\mathrm{p} = [p_x, p_y, p_z]$
$\mid \mathrm{p} \mid = 1$
ds：単位球面上で p に直交する微小面積（微小立体角）
E_{AP}：単位波数、単位立体角あたりの電界の交流分の振幅（ピーク値）

$$E_i(\mathrm{r}) = \int_0^{4\pi} \int_0^{k_0} E_{AP} cos(\omega t + \Phi_i(\mathrm{r}, k, \mathrm{p})) dk ds + E_{DCi}(\mathrm{r})$$

$$E_i(\mathrm{r}) = \int_0^{4\pi} \int_0^{k_0} E_{AP} cos(\omega t + \Phi_i(\mathrm{r}, k, \mathrm{p})) dk ds + E_{DCi}(\mathrm{r})$$

とします。
ただし $\Phi_i(\mathrm{r}, k, \mathrm{p})$：位相で k, p, i により独立
$grad(\Phi_i(\mathrm{r}, k, \mathrm{p})) = -k\mathrm{p}$
$\frac{1}{T} <<\mid \frac{\partial \Phi_i(\mathrm{r},k,\mathrm{p})}{\partial t} \mid << \omega_0$
$\mid grad(E_{AP}) \mid << \mid (k) E_{AP} \mid$
$\mid grad(k) \mid << k^2$ とすると
電界の勾配は

$$grad(E_i(\mathrm{r})) = \int_0^{4\pi} \int_0^{k_0} (k\mathrm{p}E_{AP}) sin(\omega t + \Phi_i(\mathrm{r}, k, \mathrm{p})) dk ds + grad(E_{DCi}(\mathrm{r}))$$

となります。
さらに電界の時間の２階微分を求めると

$$EX\left[\frac{\partial^2 E_i(\mathrm{r})}{\partial t^2}\right] = EX[c^2 div(grad(E_i(\mathrm{r})))]$$

$$= EX\left[c^2 \int_0^{4\pi} \int_0^{k_0} (-k^2 E_{AP}) cos(\omega t + \Phi_i(\mathrm{r}, k, \mathrm{p})) dk ds\right] + c^2 \nabla^2 (E_{DCi}(\mathrm{r}))$$

となります。
ここで

E_1：光速の変曲点
$E_1 >> \sqrt{k_0}E_{AP}, \mid (cT)grad(E_{DC}) \mid$
c_0：光速の標準値
Δc：光速の変化量
$\mid E \mid < E_1$ のとき $c = c_0$
$\mid E \mid > E_1$ のとき $c = c_0 - \Delta c$
$0 < \Delta c << c_0$
とすると
定常状態で

$$EX\left[\frac{\partial^2 \mathrm{E(r)}}{\partial t^2}\right] = 0$$

であることから E_{DC} のラプラシアンは以下のように求められます。
求める過程は次ページに示します。

$$\nabla^2\left(\mathrm{E_{DC}(r)}\right) = -\frac{2\Delta c k_0^2}{3c_0}\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}exp\left(-\frac{(E_1 - \mid \mathrm{E_{DC}(r)} \mid)^2}{2\sigma^2}\right)\frac{\mathrm{E_{DC}(r)}}{\mid \mathrm{E_{DC}(r)} \mid}$$

ただし $\sigma = \sqrt{2\pi k_0}E_{AP}$ です。
もしも交流の振幅を示す σ がほぼ一定ならば E_{DC} のラプラシアンは E_{DC} の関数として求まり、E_{DC} の絶対値が E1 に近いほどその値は大きく、その形は正規分布と同じになりました。

以下は証明です。
P：電界の方向ベクトル
$\mathrm{P} = [P_x, P_y, P_z]$
$\mid \mathrm{P} \mid = 1$
X：連続確率変数で X は $\mathrm{E_{AC}(r,t)} \bullet \mathrm{P}$ の集合とする
ただし $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$

$$EX[X] = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\mathrm{E_{AC}(r)} \bullet \mathrm{P})dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{i=x,y,z} \left[P_i \int_0^{4\pi}\int_0^{k_0} (E_{AP}) cos(\omega t + \Phi_i(\mathrm{r}, k, \mathrm{p}))dkds \right] dt = 0$$

σ^2：X の分散

$$\sigma^2 = EX[X^2] = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\mathrm{E_{AC}(r)} \cdot \mathrm{P})^2 dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{i=x,y,z} \left[P_i^2 \int_0^{4\pi}\int_0^{k_0} (E_{AP})^2 cos^2(\omega t + \Phi_i(\mathrm{r}, k, \mathrm{p}))dkds \right] dt$$

$$= \sum_{i=x,y,z} \left[P_i^2 \frac{(E_{AP})^2 k_0}{2} 4\pi \right] = 2\pi k_0 E_{AP}^2$$

中心極限定理により X は正規分布に従う
$f(x)$：X の確立密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2} \right)$$

Y：連続確率変数で Y は $\nabla^2(\mathrm{E_{AC}(r,t)} \cdot \mathrm{P})$ の集合とする
ただし $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$

$$EX[XY] = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{i=x,y,z} \left[P_i^2 \int_0^{4\pi}\int_0^{k_0} (E_{AP})^2 (-k^2) cos^2(\omega t + \Phi_i(\mathrm{r}, k, \mathrm{p}))dkds \right] dt$$

$$= \left(\int_0^{k_0} (-k^2)dk \right) EX[X^2] = \frac{-k_0^2}{3} EX[X^2]$$

a_1：X を横軸、Y を縦軸としたときの直線回帰の傾き
b_1：その切片

$$a_1 = \frac{EX[XY]}{EX[X^2]} = -\frac{k_0^2}{3}$$

$$b_1 = EX[Y] - a_1 EX[X] = 0$$

$$EX[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) a_1 x dx + b_1 = 0$$

$E_1 >> \sigma$ なので
$\mid XK_{\mathrm{P}} + \mid \mathrm{E}_{\mathrm{DC}}(\mathrm{r}) \mid\mid < E_1$ のとき $c^2 = c_0^2$
$\mid XK_{\mathrm{P}} + \mid \mathrm{E}_{\mathrm{DC}}(\mathrm{r}) \mid\mid > E_1$ のとき $c^2 = (c_0 - \Delta c)^2$
ただし $K_{\mathrm{P}} = \mathrm{P} \bullet \frac{\mathrm{E}_{\mathrm{DC}}(\mathrm{r})}{|\mathrm{E}_{\mathrm{DC}}(\mathrm{r})|}$

$$EX\left[c^2 \nabla^2 \left(\mathrm{E}_{\mathrm{AC}}(\mathrm{r}) \bullet \mathrm{P}\right)\right] = EX[c^2 Y] = \int_{-\infty}^{\infty} c^2 f(x) a_1 x dx$$

$$= \int_{\frac{E_1 - |\mathrm{E}_{\mathrm{DC}}(\mathrm{r})|}{K_{\mathrm{P}}}}^{\infty} (c_0 - \Delta c)^2 f(x) a_1 x dx$$

$$+ \int_{\frac{-E_1 - |\mathrm{E}_{\mathrm{DC}}(\mathrm{r})|}{K_{\mathrm{P}}}}^{\frac{E_1 - |\mathrm{E}_{\mathrm{DC}}(\mathrm{r})|}{K_{\mathrm{P}}}} c_0^2 f(x) a_1 x dx$$

$$+ \int_{-\infty}^{\frac{-E_1 - |\mathrm{E}_{\mathrm{DC}}(\mathrm{r})|}{K_{\mathrm{P}}}} (c_0 - \Delta c)^2 f(x) a_1 x dx$$

$$= \int_{\frac{E_1 - |\mathrm{E}_{\mathrm{DC}}(\mathrm{r})|}{K_{\mathrm{P}}}}^{\infty} (-2c_0 \Delta c) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\left(-\frac{k_0^2}{3}\right) x dx$$

$$+ \int_{-\infty}^{\frac{-E_1 - |\mathrm{E}_{\mathrm{DC}}(\mathrm{r})|}{K_{\mathrm{P}}}} (-2c_0 \Delta c) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\left(-\frac{k_0^2}{3}\right) x dx$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} c_0^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\left(-\frac{k_0^2}{3}\right) x dx$$

$$= \left[(-2c_0 \Delta c)(-\frac{k_0^2}{3}) \frac{-\sigma}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\right]_{\frac{E_1 - |\mathrm{E}_{\mathrm{DC}}(\mathrm{r})|}{K_{\mathrm{P}}}}^{\infty}$$

$$+\left[(-2c_0\Delta c)(-\frac{k_0^2}{3})\frac{-\sigma}{\sqrt{2\pi}}exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\right]_{-\infty}^{\frac{-E_1-|\mathrm{E_{DC}(r)}|}{K_\mathrm{P}}}$$

$$+\left[c_0^2(-\frac{k_0^2}{3})\frac{-\sigma}{\sqrt{2\pi}}exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$=\frac{2c_0\Delta ck_0^2}{3}\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}exp\left(-\frac{(E_1-\mid \mathrm{E_{DC}(r)}\mid)^2}{2\sigma^2K_\mathrm{P}^2}\right)$$

$$-\frac{2c_0\Delta ck_0^2}{3}\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}exp\left(-\frac{(-E_1-\mid \mathrm{E_{DC}(r)}\mid)^2}{2\sigma^2K_\mathrm{P}^2}\right)$$

P が $\mathrm{E_{DC}}$ と直交しているときは $K_\mathrm{P}=\mathrm{P}\bullet\frac{\mathrm{E_{DC}(r)}}{|\mathrm{E_{DC}(r)}|}=0$ となることから

$$EX\left[c^2\nabla^2\left(\mathrm{E_{AC}(r)}\right)\right]=EX\left[c^2\nabla^2\left(\mathrm{E_{AC}(r)}\bullet\frac{\mathrm{E_{DC}(r)}}{\mid \mathrm{E_{DC}(r)}\mid}\right)\right]\frac{\mathrm{E_{DC}(r)}}{\mid \mathrm{E_{DC}(r)}\mid}$$

$$EX\left[\frac{\partial^2\mathrm{E(r)}}{\partial t^2}\right]=EX\left[c^2\nabla^2\mathrm{E(r)}\right]=EX\left[c^2\nabla^2\left(\mathrm{E_{AC}(r)}+\mathrm{E_{DC}(r)}\right)\right]$$

$$=EX\left[c^2\nabla^2\left(\mathrm{E_{AC}(r)}\right)\right]+c_0^2\nabla^2\left(\mathrm{E_{DC}(r)}\right)$$

定常状態で

$$EX\left[\frac{\partial^2\mathrm{E(r)}}{\partial t^2}\right]=0$$

$$\nabla^2\left(\mathrm{E_{DC}(r)}\right)=\frac{-EX\left[c^2\nabla^2\left(\mathrm{E_{AC}(r)}\right)\right]}{c_0^2}$$

$$=-\frac{2\Delta ck_0^2}{3c_0}\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}exp\left(-\frac{(E_1-\mid \mathrm{E_{DC}(r)}\mid)^2}{2\sigma^2}\right)\frac{\mathrm{E_{DC}(r)}}{\mid \mathrm{E_{DC}(r)}\mid}$$