

位置座標の関数としてのスピノールモデル

2020年10月2日

長井鉄也

一般にスピノールの角運動量は $\pm \frac{\hbar}{2}$ とされており、3軸方向の有限回転を表すユニタリ演算子

$e^{i\gamma\sigma_3/2} = \begin{pmatrix} e^{i\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma/2} \end{pmatrix}$ は原点を中心にして回転角 γ を360度回転しても元に戻らない。

このためスピノールは位置座標によっては表せないと言われている。(ただし γ は回転角)

しかし、角運動量の値が $\pm \frac{\hbar}{2}$ とされているのは磁界とフェルミ粒子の電磁相互作用のハミルトニアンを観測してそれを古典的な歳差運動に適用して導きだした結果である。

3軸方向の有限回転を表すユニタリ演算子を $e^{i\gamma\sigma_3} = \begin{pmatrix} e^{i\gamma} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma} \end{pmatrix}$ とすればスピノールを位置座

標によって表すことができるが、それではフェルミ粒子に磁界や電界をかけたときの電磁相互作用のハミルトニアンが一般の理論と一致するようなモデルは存在しないのだろうか？

そこで私は以下のようなモデルを考えてみた。

コンプトン波長の $1/(2\pi)$ の半径をもつ球面上に電荷を持ち、その周辺には4元ベクトルの場 A_ν^{AC} が形成されている。 A_ν^{AC} は古典的変数ではなく、パウリ行列を含むある特定の演算子で構成される。 ψ_ν を新たな場とし $\psi_\nu = A_\nu^{AC}\psi_{dirac}$ とする。ただし ψ_{dirac} はディラック場。

このモデルに磁界や電界をかけたときの電磁相互作用のハミルトニアンが一般の理論と一致することを確認したのでそれを以下に示す。

ψ_s を4成分スピノール場とし

$$\psi_s = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} \quad (1)$$

ただし ψ_A, ψ_B はそれぞれ2成分スピノール場

静止粒子において

$$\left. \begin{aligned} \partial_0 \psi_s &= im_c \psi_s \\ \nabla^2 \psi_s &= \nabla \psi_s = 0 \end{aligned} \right\} (2)$$

とする。

ただし $m_c = \frac{m_0}{\hbar} c$

$\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu}$ $x_0 = -x^0 = -ct$ $x_i = x^i$ ($i = 1, 2, 3$) m_0 は静止質量

4元ベクトル ψ_ν を新たな場 とし

$$\psi_\nu = A_\nu^{AC} \psi_s \quad (3)$$

とする。

静止粒子において

$$\partial_0 A_\nu^{AC} = 0 \quad (4)$$

とする。

A_ν^{AC} は4元ベクトルの演算子で静止粒子では位置に依存し、運動粒子ではさらに時間に依存するとする。

$$A_0^{AC} = -A_{AC}^0 \quad A_i^{AC} = A_{AC}^i = A_{AC} \cdot \mathbf{n}_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad \mathbf{n}_i \text{ は単位ベクトルとする。}$$

以下に静止粒子を考える。 r_1 をコンプトン波長の $\frac{1}{2\pi}$ とし $r_1 = \frac{c}{\omega}$ $\omega = m_c = \frac{m_0}{h} c$

半径 r_1 の球面上にのみ場のダランベルジャン $\square\psi_\nu$ がゼロ以外の値を持つこととし

$$\left. \begin{aligned} \square\psi_0 &= J_c (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_r) \delta(r - r_1) \psi_s \\ \square\psi_i &= \frac{ijc}{2} \sigma_i \left(1 - \left(\frac{x_i}{r_1} \right)^2 \right) \delta(r - r_1) \psi_s \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

とすると

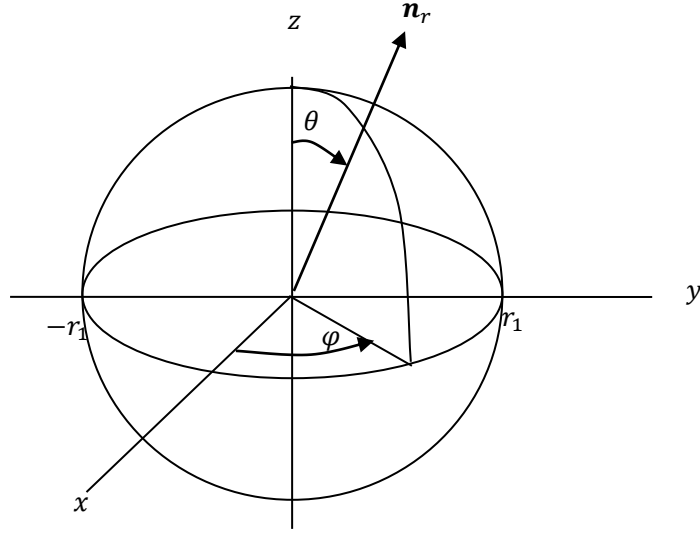
$$\partial^\nu (\square\psi_\nu) = 0 \quad (6)$$

となって $\square\psi_0$ は保存する。

ただし J_c は実数の定数 $\boldsymbol{\sigma}$ はパウリ行列 $[\sigma_i, \sigma_j]_+ = \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij}$

$\mathbf{n}_r = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ は極座標上で原点から θ, φ 方向に延びる単位ベクトル

$$\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad \square a = \partial_\mu \partial^\mu a$$



以上のことから半径 $r \neq r_1$ の線形領域の中で静止粒子において(5)式より

$$0 = \square\psi_\nu = \partial_\mu\partial^\mu\psi_\nu = (\nabla^2 - (\partial_0)^2)\psi_\nu \quad (7)$$

(2) (4) (7)式より

$$\nabla^2\psi_\nu = (\partial_0)^2\psi_\nu = (\partial_0)^2(A_\nu^{AC}\psi_s) = (-m_c^2 A_\nu^{AC})\psi_s \quad (8)$$

(2) (3) 式より

$$\begin{aligned} \nabla^2\psi_\nu &= \nabla^2(A_\nu^{AC}\psi_s) = \nabla((\nabla A_\nu^{AC})\psi_s + A_\nu^{AC}(\nabla\psi_s)) \\ &= ((\nabla^2 A_\nu^{AC})\psi_s + 2(\nabla A_\nu^{AC})\nabla\psi_s + A_\nu^{AC}(\nabla^2\psi_s)) \\ &= (\nabla^2 A_\nu^{AC})\psi_s \end{aligned} \quad (9)$$

ただし (∇A_ν^{AC}) の ∇ は A_ν^{AC} にのみ $(\nabla^2 A_\nu^{AC})$ の ∇^2 は A_ν^{AC} にのみかかる。

(8) (9) 式より

$$\nabla^2 A_\nu^{AC} = -m_c^2 A_\nu^{AC} \quad (10)$$

公式 $(\sigma \cdot \mathbf{a})(\sigma \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + i\sigma \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ と (10)より

$$(\sigma \cdot \nabla)(\sigma \cdot \nabla)A_\nu^{AC} = (\nabla^2 + i\sigma \cdot \nabla \times \nabla)A_\nu^{AC} = \nabla^2 A_\nu^{AC} = -m_c^2 A_\nu^{AC} = -A_\nu^{AC} m_c^2 \quad (11)$$

(7)(11) 式より

$$\begin{aligned} 0 &= ((\sigma \cdot \nabla)(\sigma \cdot \nabla) - (\partial_0)^2)A_\mu^{AC}\psi_s = A_\mu^{AC}((\sigma \cdot \nabla)(\sigma \cdot \nabla) - (\partial_0)^2)\psi_s - A_\mu^{AC}m_c^2\psi_s \\ &= A_\mu^{AC}\{((\sigma \cdot \nabla)(\sigma \cdot \nabla) - (\partial_0)^2) - m_c^2\}\psi_s \end{aligned} \quad (12)$$

電磁場 A_ν^{out} の中では微分を共変微分に置き換えて

$$A_\mu^{AC}\{((\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}) - (D_0)^2) - m_c^2\}\psi_s = 0$$

ただし D_ν は共変微分 $D_\nu = \partial_\nu - i\frac{q}{\hbar}A_\nu^{out}$

左から $\frac{(A_\mu^{AC})^\dagger}{(A_\mu^{AC})^\dagger A_\mu^{AC}}$ をかけて

$$\{((\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}) - (D_0)^2) - m_c^2\}\psi_s = 0$$

となるので

$$\{((\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}) - (D_0)^2)\}\psi_s = m_c^2\psi_s \quad (13)$$

したがって

$$i\gamma^\nu D_\nu\psi_s = m_c\psi_s \quad (14)$$

となって電磁場中のディラック方程式と整合するので $\psi_s = \psi_{dirac}$ である。

ただし γ^ν はディラックのガンマ行列 $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$

以上のことからこのモデルに磁界や電界をかけたときの電磁相互作用のハミルトニアンは一般の理論と一致することになる。

また、4元ベクトルと共変微分で構成されているのでローレンツ不変性とゲージ不変性を持つ。

このモデルに関して次の手順で研究を進める。

1. 同様のモデルが過去に議論されたことはないのかどうか調査する。
2. 非線形波動方程式の定常振動解がこのモデル自身となるような非線形条件を探す。
3. その非線形条件による相互作用から重力加速度が導けるかどうかを検証し一般相対論との整合性を検証する。
4. このモデルは空間三次元の1軸あたり4つの自由度を持つが2乗和の総和が定数となるので $3 \times 4 - 1 = 11$ となって11次元の現象である。このことから超弦理論との関連性についても検証する。
5. このモデルは常に A_μ^{AC} が粒子から放射されている。放射された A_μ^{AC} は他の粒子と相互作用を起し粒子の振動数や寿命を決定する要因になっている可能性について検証する。
6. 放射された $A_{AC}^\mu A_\mu^{AC}$ を無限大の時間で積分すると無限大となる。しかし $A_{AC}^\mu A_\mu^{AC}$ は他の粒子に吸収されることや宇宙の平均密度が小さいことからその変化の時定数は宇宙赤方偏移の時定数に匹敵する可能性はないだろうか？ このことについて定量的分析を行う。
7. その他、繰り込み理論、標準理論など従来の理論や観測との整合性を検証する。

(6)式の証明

定義より

$$\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \quad x_0 = -x^0 = -ct \quad x_i = x^i \quad (i = 1, 2, 3)$$

ただし J_c は複素数の定数 σ はパウリ行列 $[\sigma_i, \sigma_j]_+ = \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij}$

$\mathbf{n}_r = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ は極座標上で原点から θ, φ 方向に延びる単位ベクトル

$$\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad \square a = \partial_\mu \partial^\mu a$$

$$\left. \begin{aligned} \square \psi_0 &= J_c (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_r) \delta(r - r_1) \psi_s \\ \square \psi_i &= \frac{iJ_c}{2} \sigma_i \left(1 - \left(\frac{x_i}{r_1} \right)^2 \right) \delta(r - r_1) \psi_s \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

とすると

$$\begin{aligned} \partial^\nu (\psi_\nu) &= \partial^i (\psi_i) + \partial^0 (\psi_0) \\ &= \frac{iJ_c}{2} (\sigma_i) \left(-2 \left(\frac{x^i}{r_1^2} \right) \right) \delta(r - r_1) \psi_s - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (J_c (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_r) \delta(r - r_1) \psi_s) \\ &= \frac{-i}{r_1} J_c (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_r) \delta(r - r_1) \psi_s - \frac{-i}{r_1} J_c (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_r) \delta(r - r_1) \psi_s = 0 \end{aligned}$$

となるので

$$\partial^\nu (\square \psi_\nu) = 0 \quad (6)$$

(6)式が証明できた。

(13)式が(14) 式と整合することの証明

定義より $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$, $D_\nu = \partial_\nu - i\frac{q}{\hbar}A_\nu^{out}$

$$\psi_s = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$i\gamma^\nu D_\nu \psi_s = m_c \psi_s \quad (14)$$

とすると

$$\begin{aligned} m_c^2 \psi_s &= (i\gamma^\nu D_\nu)(i\gamma^\nu D_\nu)\psi_s = \\ &= -\begin{pmatrix} 0 & D_0 + \sigma^i D_i \\ D_0 - \sigma^i D_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & D_0 + \sigma^i D_i \\ D_0 - \sigma^i D_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 0 & (D_0)^2 - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}) \\ (D_0)^2 - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} \\ &= \{((\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}) - (D_0)^2)\} \psi_s \end{aligned}$$

したがって

$$\{((\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}) - (D_0)^2)\} \psi_s = m_c^2 \psi_s \quad (13)$$

となるので(13)式は(14) 式と整合する。

A_v^{AC} の特定

$$\psi_v = A_v^{AC} \psi_s \quad (3)$$

$$\partial_0 A_v^{AC} = 0 \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \square \psi_0 &= J_c (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_r) \delta(r - r_1) \psi_s \\ \square \psi_i &= \frac{ij_c}{2} \sigma_i \left(1 - \left(\frac{x_i}{r_1}\right)^2\right) \delta(r - r_1) \psi_s \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

J_v^{AC} を4元量とし

$$J_0^{AC} = J_c (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_r) \delta(r - r_1)$$

$$J_i^{AC} = \frac{ij_c}{2} \sigma_i \left(1 - \left(\frac{x_i}{r_1}\right)^2\right) \delta(r - r_1)$$

とすると (5)式より

$$\square \psi_v = \square (A_v^{AC} \psi_s) = J_v^{AC} \psi_s$$

となる。

$$A_v^{AC} |_{\theta=0, r=r_m} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{J_v^{AC} |_{\theta=\theta', \varphi=\varphi', r=r'} \exp\left(i \frac{r_d}{r_1}\right)}{r_d} \sin\theta' d\theta' d\varphi' dr'$$

とすると

$$\begin{aligned} \square \psi_v |_{\theta=0, r=r_m} &= \square (A_v^{AC} \psi_s) |_{\theta=0, r=r_m} \\ &= \square \left(\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{J_v^{AC} |_{\theta=\theta', \varphi=\varphi', r=r'} \exp\left(i \frac{r_d}{r_1}\right) \psi_s}{r_d} \sin\theta' d\theta' d\varphi' dr' \right) \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \square \left(\frac{J_v^{AC} |_{\theta=\theta', \varphi=\varphi', r=r'} \exp\left(i \frac{r_d}{r_1}\right) \psi_s}{r_d} \right) \sin\theta' d\theta' d\varphi' dr' \\ &= J_v^{AC} \psi_s \end{aligned}$$

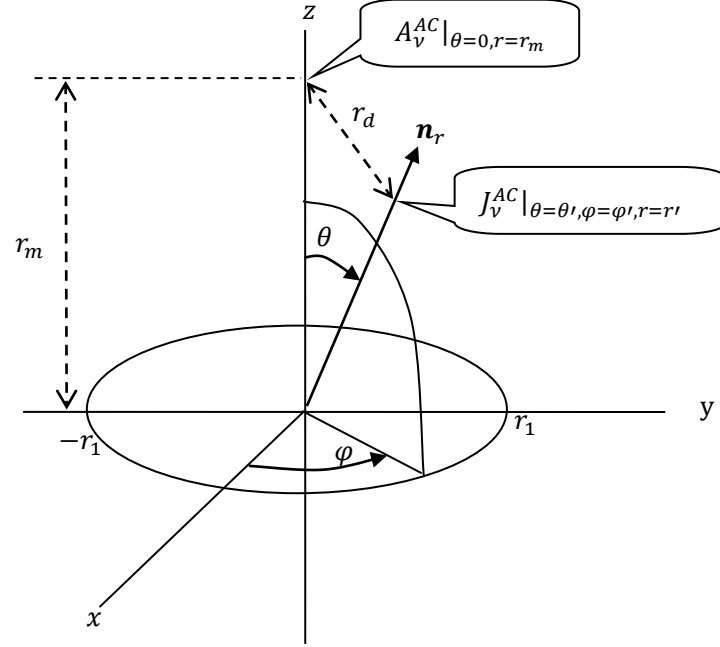
となって

$$\square \psi_v = \square (A_v^{AC} \psi_s) = J_v^{AC} \psi_s$$

と一致する。

$\theta = 0, r = r_m$ の位置での A_v^{AC} を $A_v^{AC}|_{\theta=0, r=r_m}$ とし

$\theta = \theta', \varphi = \varphi', r = r'$ の位置からの距離を r_d とする。



$$\begin{aligned} r_d &= \sqrt{(r' \sin \theta' \cos \varphi')^2 + (r' \sin \theta' \sin \varphi')^2 + (r_m - r' \cos \theta')^2} \\ &= \sqrt{(r' \sin \theta')^2 + (r_m - r' \cos \theta')^2} \\ &= \sqrt{(r' \sin \theta')^2 + r_m^2 - 2r_m r' \cos \theta' + (r' \cos \theta')^2} \\ &= \sqrt{r'^2 + r_m^2 - 2r_m r' \cos \theta'} \end{aligned}$$

$$r > 0$$

$$r_1 = \frac{c}{\omega}$$

$$A_0^{AC}|_{\theta=0, r=r_m} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{J_0^{AC}|_{\theta=\theta', \varphi=\varphi', r=r'} \exp\left(i \frac{r_d}{r_1}\right)}{r_d} \sin \theta' d\theta' d\varphi' dr'$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{J_c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_r) \delta(r' - r_1) \exp\left(i \frac{r_d}{r_1}\right)}{r_d} \sin\theta' d\theta' d\varphi' dr' \\
&= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{J_c \begin{bmatrix} \sigma_1 \sin\theta' \cos\varphi' \\ +\sigma_2 \sin\theta' \sin\varphi' \\ +\sigma_3 \cos\theta' \end{bmatrix} \delta(r' - r_1) \exp\left(i \frac{r_d}{r_1}\right)}{r_d} \sin\theta' d\theta' d\varphi' dr' \\
&= 2\pi J_c \sigma_3 \int_0^\pi \frac{\cos\theta' \exp\left(i \frac{r_d}{r_1}\right)}{r_d} \sin\theta' d\theta' \\
&= \left(\int_0^\pi \frac{\exp\left(i \frac{\sqrt{r_1^2 + r_m^2 - 2r_m r_1 \cos\theta'}}{r_1}\right) \cos\theta}{\sqrt{r_1^2 + r_m^2 - 2r_m r_1 \cos\theta'}} \sin\theta' d\theta' \right) 2\pi J_c \sigma_3 \\
&= \left(\frac{\left[\exp\left(i \frac{\sqrt{r_1^2 + r_m^2 - 2r_m r_1 \cos\theta'}}{r_1}\right) \begin{pmatrix} r_1 \\ +r_m \cos\theta' \\ -i\sqrt{r_1^2 + r_m^2 - 2r_m r_1 \cos\theta'} \end{pmatrix} \right]_{\theta'=0}^\pi}{r_m^2} \right) 2\pi J_c \sigma_3 \\
&= \left(\frac{\begin{pmatrix} \exp\left(i \frac{\sqrt{(r_m - r_1)^2}}{r_1}\right) (ir_1 + ir_m + \sqrt{(r_m - r_1)^2}) \\ -\exp\left(i \frac{\sqrt{(r_m + r_1)^2}}{r_1}\right) (ir_1 - ir_m - \sqrt{(r_m + r_1)^2}) \end{pmatrix}}{r^2} \right) 2\pi J_c \sigma_3 \\
&= \left(\frac{\begin{pmatrix} (-1 + i) \exp\left(i \frac{r_m + r_1}{r_1}\right) (r_m + ir_1) \\ + \exp\left(i \frac{|r_m - r_1|}{r_1}\right) (i(r_m + r_1) + |r_m - r_1|) \end{pmatrix}}{r_m^2} \right) 2\pi J_c \sigma_3
\end{aligned}$$

したがって

$$A_0^{AC}|_{\theta=0, r=r_m} = \left(\frac{\left(\begin{array}{l} (-1+i)\exp\left(i\frac{r_m+r_1}{r_1}\right)(r_m+ir_1) \\ +\exp\left(i\frac{|r_m-r_1|}{r_1}\right)(i(r_m+r_1)+|r_m-r_1|) \end{array} \right)}{r_m^2} \right) 2\pi J_c \sigma_3$$

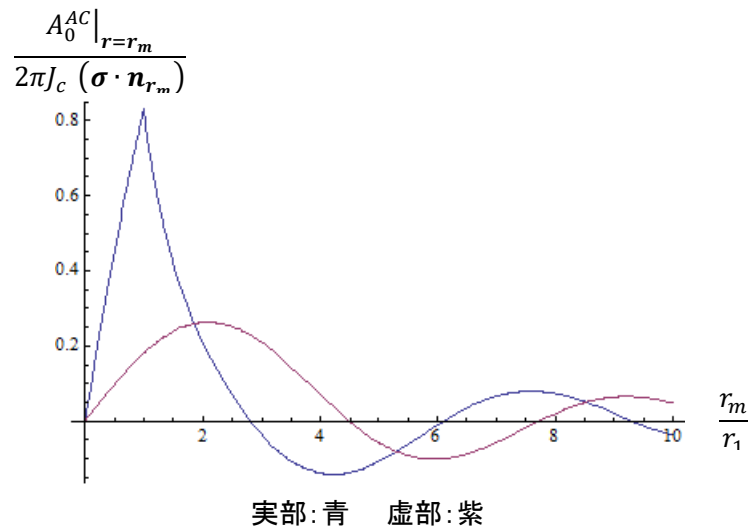
積分には mathematica を用いた。

一般化して任意の位置 $\mathbf{r}_m = \begin{pmatrix} r_m \\ \theta_m \\ \varphi_m \end{pmatrix}$ において

$$A_0^{AC}|_{r=r_m} = \frac{\left(\begin{array}{l} (-1+i)\exp\left(i\frac{r_m+r_1}{r_1}\right)(r_m+ir_1) \\ +\exp\left(i\frac{|r_m-r_1|}{r_1}\right)(i(r_m+r_1)+|r_m-r_1|) \end{array} \right)}{r_m^2} 2\pi J_c (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{r_m})$$

ただし $\mathbf{n}_{r_m} = \frac{\mathbf{r}_m}{r_m}$

横軸を $\frac{r_m}{r_1}$ として $\frac{A_0^{AC}|_{r=r_m}}{2\pi J_c (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{r_m})}$ をプロットすると



$r = r_m$ $r = r_1$ の位置において静止時

$$\begin{aligned}
 & A_0^{AC} \Big|_{r=r_m, r=r_1} \\
 &= \frac{(-1+i)\exp\left(i\frac{r_1+r_1}{r_1}\right)(r_1+ir_1) + \exp\left(i\frac{|r_1-r_1|}{r_1}\right)(i(r_1+r_1) + |r_1-r_1|)}{r_1^2} 2\pi J_c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{r_m}) \\
 &= \frac{2i(\cos(1) + i\sin(1))(1+i)(\cos(1) - \sin(1))}{r_1} 2\pi J_c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{r_m}) \\
 &= \frac{0.832294 + 0.181405i}{r_1} 2\pi J_c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{r_m})
 \end{aligned}$$

となって半径 r_1 球面上で実部は最大となる。