８章　自由場理論の経路積分

前提条件: 3章, 7章

調和振動子の結果は、ハミルトニアン密度の自由場理論に直接的に一般化することができる。

$$\mathcal{H}_0 = \tfrac{1}{2}\Pi^2 + \tfrac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \tfrac{1}{2}m^2\varphi^2 \ . \qquad (8.1)$$

必要な辞書は

$$\begin{aligned} q(t) &\longrightarrow \varphi(\mathbf{x},t) \quad &&(\text{classical field}) \\ Q(t) &\longrightarrow \varphi(\mathbf{x},t) \quad &&(\text{operator field}) \\ f(t) &\longrightarrow J(\mathbf{x},t) \quad &&(\text{classical } \textit{source}) \end{aligned} \qquad (8.2)$$

(classical field)古典場

(operator field)演算子場

(classical source) (8.2)古典源

古典場φ（x）と対応する演算子場との区別は文脈から明らかでなければならない。

εトリックを使用するには、H_0に$1-i\varepsilon$を掛ける。 結果はH_0のm^2を$m^2-i\varepsilon$ に置き換えるのと同等である。

これからは、表記法として

$m^2-i\varepsilon$を意味するとき、m^2と書くことにする。

経路積分（汎関数積分とも呼ばれる）を書き留めてみよう。

自由場理論のために：

$$Z_0(J) \equiv \langle 0|0\rangle_J = \int \mathcal{D}\varphi \; e^{i\int d^4x[\mathcal{L}_0 + J\varphi]} \ , \qquad (8.3)$$

ただし

$$\mathcal{L}_0 = -\tfrac{1}{2}\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi - \tfrac{1}{2}m^2\varphi^2 \qquad (8.4)$$

はグランジュアン密度

$$\mathcal{D}\varphi \propto \prod_x d\varphi(x) \qquad (8.5)$$

これは関数測度である。経路積分と言うと、今私たちは場の構成空間における経路を意味する。

我々は７章の調和振動子に対して行ったのと同じように$Z_0(J)$ を評価することができる。
我々は、4次元フーリエ変換を導入し、

$$\tilde{\varphi}(k) = \int d^4x\, e^{-ikx}\, \varphi(x)\,, \qquad \varphi(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{ikx}\, \tilde{\varphi}(k)\,, \qquad (8.6)$$

ただし$kx = -k^0 t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}$　は積分変数である。
$S_0 = \int d^4x [L_0 + J\varphi]$から始めて

$\varphi = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ikx}\tilde{\varphi}(k) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{i(-k^0t+\boldsymbol{k}\boldsymbol{x})}\tilde{\varphi}(k)$なので

$$S_0 = \int d^4x [L_0 + J\varphi] = \int d^4x \left[-\frac{1}{2}\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + J\varphi\right]$$

$$= \int d^4x \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t},\nabla\right)\varphi\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t},\nabla\right)\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + J\varphi\right]$$

$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ikx} \int \frac{d^4k^{\prime}}{(2\pi)^4} e^{ik^{\prime}x}\left[-\frac{1}{2}(-k^0 + \boldsymbol{k})\tilde{\varphi}(k)(k^0 + \boldsymbol{k})\tilde{\varphi}(k^{\prime}) - \frac{1}{2}m^2\tilde{\varphi}(k)\tilde{\varphi}(k^{\prime})\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\tilde{J}(k)\tilde{\varphi}(k^{\prime}) + \frac{1}{2}\tilde{J}(k)\tilde{\varphi}(k^{\prime})\right]$$

$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{i(k+k^{\prime})x} \int \frac{d^4k^{\prime}}{(2\pi)^4}\left[-\frac{1}{2}(-(k^0)^2 + \boldsymbol{k}^2)\tilde{\varphi}(k)\tilde{\varphi}(k^{\prime}) - \frac{1}{2}m^2\tilde{\varphi}(k)\tilde{\varphi}(k^{\prime})\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\tilde{J}(k)\tilde{\varphi}(k^{\prime}) + \frac{1}{2}\tilde{J}(k)\tilde{\varphi}(k^{\prime})\right]$$

$$= \delta^4(k + k^{\prime})\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[-\frac{1}{2}(k^2)\tilde{\varphi}(k)\tilde{\varphi}(k^{\prime}) - \frac{1}{2}m^2\tilde{\varphi}(k)\tilde{\varphi}(k^{\prime}) + \frac{1}{2}\tilde{J}(k)\tilde{\varphi}(k^{\prime})\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\tilde{J}(k)\tilde{\varphi}(k^{\prime})\right]$$

$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[-\frac{1}{2}(k^2)\tilde{\varphi}(k)\tilde{\varphi}(-k) - \frac{1}{2}m^2\tilde{\varphi}(k)\tilde{\varphi}(-k) + \frac{1}{2}\tilde{J}(k)\tilde{\varphi}(-k) + \frac{1}{2}\tilde{J}(k)\tilde{\varphi}(-k)\right]$$

従って

$$S_0 = \frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[-\tilde{\varphi}(k)(k^2 + m^2)\tilde{\varphi}(-k) + \tilde{J}(k)\tilde{\varphi}(-k) + \tilde{J}(-k)\tilde{\varphi}(k)\right], \quad (8.7)$$

を得る。ただし

$$\int \frac{d^4k^{\prime}}{(2\pi)^4} e^{i(k+k^{\prime})x} = \delta^4(k + k^{\prime})$$
$$k^2 = \boldsymbol{k}^2 - (k^0)^2$$

経路積分変数を以下のように変える

$$\widetilde{\chi}(k)=\widetilde{\varphi}(k)-\frac{\widetilde{J}(k)}{k^2+m^2}\,. \tag{8.8}$$

これは単なる定数によるシフトであるため、$D\varphi=D\chi$となる。
作用は

(7.8)と同様に平方完成により

$$S_0=\frac{1}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[\frac{\widetilde{J}(k)\widetilde{J}(-k)}{k^2+m^2}-\widetilde{\chi}(k)(k^2+m^2)\widetilde{\chi}(-k)\right]. \tag{8.9}$$

になる

調和振動子のようにχに係る積分は$Z_0(0)=\langle 0|0\rangle_{J=0}=1$になる。

従って

$$Z_0(0)=\langle 0|0\rangle_{J=0}=\int D\varphi e^{i(S_0)_{J=0}}=\int D\varphi e^{i\frac{1}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}[-\widetilde{\chi}(k)(k^2+m^2)\widetilde{\chi}(-k)]}=1$$

$$\begin{aligned}Z_0(J)&=\exp\left[\frac{i}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\widetilde{J}(k)\widetilde{J}(-k)}{k^2+m^2-i\epsilon}\right]\\&=\exp\left[\frac{i}{2}\int d^4x\,d^4x'\,J(x)\Delta(x-x')J(x')\right].\end{aligned} \tag{8.10}$$

ここでファインマンプロパゲータを

$$\Delta(x-x')=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{ik(x-x')}}{k^2+m^2-i\epsilon}\,. \tag{8.11}$$

と定義する。
ファインマンプロパゲータはクラインゴルドン方程式のグリーン関数である。

$$(-\partial_x^2 + m^2)\Delta(x - x') = \delta^4(x - x') \ . \qquad (8.12)$$

これは(8.11)を(8.12)に代入して$\varepsilon \to 0$の極限として求められる。

$$(-\partial_x^2 + m^2)\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{ik(x-x')}}{k^2+m^2-i\varepsilon} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{k^2+m^2}{k^2+m^2-i\varepsilon}e^{ik(x-x')} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{ik(x-x')}$$

$$= \delta^4(x - x')$$

(8.11) 式の右辺のk^0積分$\Delta(x - x')$をk^0の複素空間上の線積分として扱って留数定理を使って評価することで明示的に評価出来る。

(8.11)と

$$\int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4}e^{i(k+k')x} = \delta^4(k + k')$$

$k^2 = \boldsymbol{k}^2 - (k^0)^2$ 　、$\omega^2 = \boldsymbol{k}^2 + m^2$

より

$$\Delta(x - x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{ik(x-x')}}{k^2 + m^2 - i\varepsilon} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{ik(x-x')}}{\boldsymbol{k}^2 - (k^0)^2 + m^2 - i\varepsilon}$$

$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{ik(x-x')}}{-(k^0)^2 + \omega^2 - i\varepsilon}$$

εの２次項を無視して$2\omega\varepsilon$を新たにεと定義しなおすと

$$\Delta(x - x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{ik(x-x')}}{-(k^0 + \omega - i\varepsilon)(k^0 - \omega + i\varepsilon)}$$

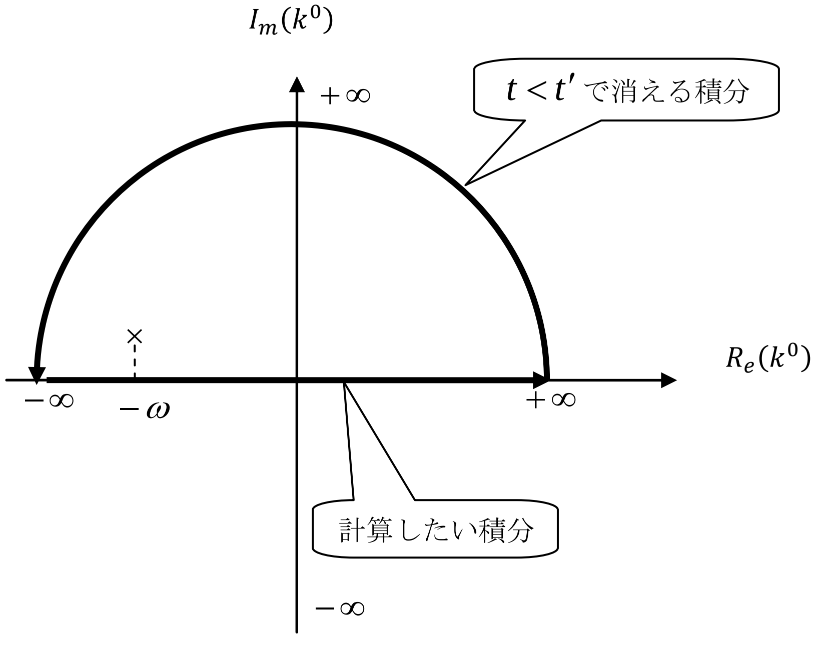
$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik^0(t-t')}e^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}}{-(k^0 + \omega - i\varepsilon)(k^0 - \omega + i\varepsilon)}$$

k^0積分について$t<t'$の場合を考える。

k^0の実部と虚部の状態に依存して上記$\left[\ldots\right]$は以下のようになる。

$t<t'$ で消える積分

		$R_e(k^0)$		
		$-\infty$	有限	∞
$I_m(k^0)$	$+\infty$	$\left[\dfrac{+0}{-\infty}\right]=-0$	$\left[\dfrac{+0}{-\infty}\right]=-0$	$\left[\dfrac{+0}{-\infty}\right]=-0$
	有限	$\left[\dfrac{\text{有限}}{-\infty}\right]=\pm 0$	$\left[\dfrac{\text{有限}}{\text{有限}}\right]=\text{有限}$	$\left[\dfrac{\text{有限}}{-\infty}\right]=\pm 0$
	$-\infty$	$\left[\dfrac{+\infty}{-\infty}\right]$	$\left[\dfrac{+\infty}{-\infty}\right]$	$\left[\dfrac{+\infty}{-\infty}\right]$



円弧の経路（$t<t'$で消える積分）を加えても積分の結果は変わらないので周回積分に置き換えることが出来る。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk^0}{2\pi}\to\oint\frac{dk^0}{2\pi}$$

留数定理

aに極があるとき

$$\oint_{z=a\text{の周りを反時計周り}} dzf(z) \quad = 2\pi i\lim_{z\to a}(z-a)f(z)$$

時計周りのときは結果に(−1)が加算される。

$t < t'$ のとき$k^0 = -\omega$の周りを反時計周りの経路をとるので

$$\Delta(x - x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik^0(t-t')}e^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}}{-(k^0 + \omega - i\varepsilon)(k^0 - \omega + i\varepsilon)}$$

$$= 2\pi i \lim_{k^0 \to -\omega} (k^0 + \omega) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ik^0(t-t')}e^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}}{-(k^0 + \omega - i\varepsilon)(k^0 - \omega + i\varepsilon)}$$

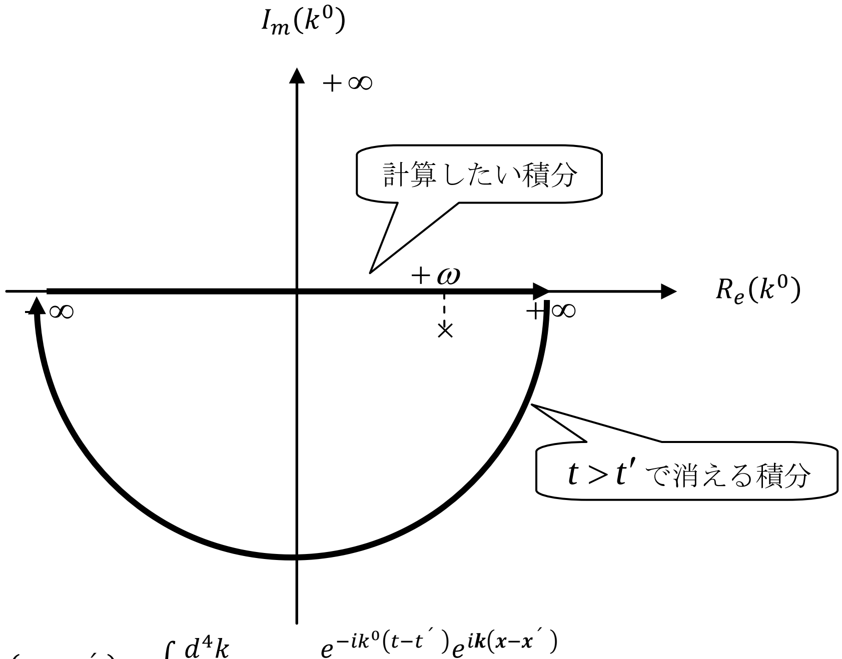
$$= i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\omega(t-t')}e^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}}{2\omega}$$

$$= i \int \widetilde{dk}\ e^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')+i\omega(t-t')}$$

ただし

$$\widetilde{dk} \equiv \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega}$$

$t > t'$ のときき$k^0 = \omega$の周りを時計周りの経路をとるので



$$\Delta(x - x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik^0(t-t')}e^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}}{-(k^0 + \omega - i\varepsilon)(k^0 - \omega + i\varepsilon)}$$

$$= -2\pi i\ \lim_{k^0 \to \omega}(k^0 - \omega) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ik^0(t-t')} e^{ik(x-x')}}{-(k^0+\omega-i\varepsilon)(k^0-\omega+i\varepsilon)}$$

$$= i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\omega(t-t')} e^{ik(x-x')}}{2\omega}$$

$$= i \int \widetilde{dk}\ e^{ik(x-x')+i\omega(t-t')}$$

$$= i \int \widetilde{dk}\ e^{-ik(x-x')+i\omega(t-t')}$$

ただし最後の行は積分範囲が正負対称なので$\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{dk} e^{ik}$を$\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{dk} e^{-ik}$に置き換えている。

その結果は

$$\Delta(x-x') = i \int \widetilde{dk}\ e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')-i\omega|t-t'|}$$
$$= i\theta(t-t') \int \widetilde{dk}\ e^{ik(x-x')} + i\theta(t'-t) \int \widetilde{dk}\, e^{-ik(x-x')}\ , \qquad (8.13)$$

ただし$\theta(t)$は単位階段関数である。

$\widetilde{dk}$上での積分はベッセル関数でもある。　４章参照

[Wikipedia プロパゲータ]

$$G_F(x,y) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi}\delta(s) + \frac{m}{8\pi\sqrt{s}} H_1^{(1)}(m\sqrt{s}) & \text{if } s \geq 0 \\ -\frac{im}{4\pi^2\sqrt{-s}} K_1(m\sqrt{-s}) & \text{if} s < 0. \end{cases}$$

ここで

$$s := (x^0 - y^0)^2 - (\vec{x} - \vec{y})^2.$$

である。ここに、x と y はミンコフスキー時空の 2つの点であり、指数の中のドットは4元ベクトルの内積である。$H_1^{(1)}$ はハンケル函数であり、K_1 はベッセル函数#変形ベッセル函数である。

調和振動子の時間順序積の真空期待値の式と同様に

て

$$\langle 0|\mathrm{T}\varphi(x_1)\ldots|0\rangle = \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\ldots Z_0(J)\Big|_{J=0}. \qquad (8.14)$$

を得る。

明白な(8.10)式を使って

$$\langle 0|T\varphi(x_1)\varphi(x_2)|0\rangle = \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_2)}Z_0(J)\Big|_{J=0}$$

$$= \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_2)}exp\left[\frac{i}{2}\int d^4xd^4x'J(x)\Delta(x-x')J(x')\right]\Bigg|_{J=0}$$

$$= \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\frac{1}{i}\begin{bmatrix}\frac{i}{2}\int d^4xd^4x'\delta(x-x_2)\Delta(x-x')J(x') \\ +\frac{i}{2}\int d^4xd^4x'J(x)\Delta(x-x')\delta(x'-x_2)\end{bmatrix}Z_0(J)|_{J=0}$$

$$= \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\left[\int d^4x'\,\Delta(x_2-x')J(x')\right]Z_0(J)\Big|_{J=0}$$

$$= \frac{1}{i}\left[\int d^4x'\,\Delta(x_2-x')\delta(x'-x_1)\right]Z_0(J)\Big|_{J=0}$$

$$+\frac{1}{i}\left[\int d^4x'\,\Delta(x_2-x')J(x')\right]\begin{bmatrix}\frac{i}{2}\int d^4xd^4x'\delta(x-x_1)\Delta(x-x')J(x') \\ +\frac{i}{2}\int d^4xd^4x'J(x)\Delta(x-x')\delta(x'-x_1)\end{bmatrix}Z_0(J)|_{J=0}$$

$$= \frac{1}{i}[\Delta(x_2-x_1)]Z_0(J)\Big|_{J=0} + \frac{1}{i}[J\text{を含む項}]Z_0(J)\Big|_{J=0}$$

$$= \frac{1}{i}[\Delta(x_2-x_1)]Z_0(J)\Big|_{J=0}$$

$$= \frac{1}{i}\Delta(x_2-x_1) \qquad (8.15)$$

ただし$\frac{\delta f(t_2)}{\delta f(t_1)} = \delta(t_1-t_2)$

$$\int d^4x\delta(x-x_n) = 1$$

を使っている

この方法でより多くのφについても時間順序積の真空期待値を計算しよう

φの数が奇数であるとき前因子に残りのJがあるので結果はゼロになる。
φの数が偶数であるとき汎関数微分のペアにより非ゼロの結果を得る。
従ってたとえば

$$\langle 0|T\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)|0\rangle = \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_3)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_4)}Z_0(J)\Big|_{J=0}$$

$$= \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_3)}\left[\int d^4x'\,\Delta(x_4-x')J(x')\right]Z_0(J)\Big|_{J=0}$$

$$= \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\frac{1}{i}[\Delta(x_4-x_3)]Z_0(J)\Big|_{J=0}$$

$$+\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\left[\int d^4x'\,\Delta(x_4-x')J(x')\right]$$

$$\left[\int d^4x'\,\Delta(x_3-x')J(x')\right]Z_0(J)|_{J=0}$$

$$= \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\frac{1}{i}[\Delta(x_4-x_3)]\left[\int d^4x'\,\Delta(x_2-x')J(x')\right]Z_0(J)\Big|_{J=0}$$

$$+\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\frac{1}{i}\Bigg[[\Delta(x_4-x_2)]\left[\int d^4x'\,\Delta(x_3-x')J(x')\right]$$

$$+\left[\int d^4x'\,\Delta(x_4-x')J(x')\right][\Delta(x_3-x_2)]$$

$$+\left[\int d^4x'\,\Delta(x_4-x')J(x')\right]\left[\int d^4x'\,\Delta(x_3-x')J(x')\right]\left[\int d^4x'\,\Delta(x_2\right.$$

$$\left.-x')J(x')\right]\Bigg]Z_0(J)|_{J=0}$$

$$= +\frac{1}{i^2}\Big[[\Delta(x_4-x_3)][\Delta(x_2-x_1)] \quad +[\Delta(x_4-x_2)][\Delta(x_3-x_1)]$$

$$+[\Delta(x_4-x_1)][\Delta(x_3-x_2)]\Big]Z_0(J)|_{J=0}$$

$$= \frac{1}{i^2}\Big[[\Delta(x_1-x_2)][\Delta(x_3-x_4)] \quad +[\Delta(x_1-x_3)][\Delta(x_2-x_4)]+[\Delta(x_1-x_4)][\Delta(x_2-x_3)]\Big]$$

(8.16)

ただし$\frac{\delta f(t_2)}{\delta f(t_1)} = \delta(t_1 - t_2)$

$$\int d^4x' \delta(x' - x_n) = 1$$

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_n)} Z_0(J)\bigg|_{J=0} = \left[\int d^4x'\, \Delta(x_n - x')J(x')\right] Z_0(J)\bigg|_{J=0} = 0$$

$$Z_0(J)|_{J=0} = 1$$

$$\Delta(x_n - x_m) = \Delta(x_m - x_n)$$

を使っている

$$\begin{aligned}\langle 0|\mathrm{T}\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)|0\rangle = \frac{1}{i^2}\Big[&\Delta(x_1-x_2)\Delta(x_3-x_4) \\ &+ \Delta(x_1-x_3)\Delta(x_2-x_4) \\ &+ \Delta(x_1-x_4)\Delta(x_2-x_3)\Big]. \quad (8.16)\end{aligned}$$

より一般的には

$$\langle 0|\mathrm{T}\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_{2n})|0\rangle = \frac{1}{i^n}\sum_{\text{pairings}} \Delta(x_{i_1}-x_{i_2})\ldots\Delta(x_{i_{2n-1}}-x_{i_{2n}})\,. \quad (8.17)$$

この結果はWickの定理として知られている。

参考文献

量子場の理論入門　前野昌弘氏　（琉球大学）

http://www.phys.u-ryukyu.ac.jp/~maeno/field.pdf

講義資料　東北大　綿村 哲氏

http://www.tuhep.phys.tohoku.ac.jp/~watamura/kougi/

[長井質問]
８章で出て来る Feynman propagator は空間的領域で値を持つのでしょうか？
値を持つとすれば粒子が発生したときに既に空間的な広がりを持っているのでしょうか？

[米谷先生の回答]
Feynman propagator の場合、
空間的な２点間でゼロでない値を持ちます。KG 方程式や
Dirac 方程式には負エネルギー解が存在するわけですが、
グリーン関数に対する境界条件の設定により、その現れ方が
違ってきます。Feynman propagator ¥Delta_F(x_1-x_2)では
負エネルギー状態の寄与があっても、時間差 t=t_1-t_2 に関して
正振動数成分だけが寄与するように、場の演算子の作用を
時間によって順序付けているため、

<0|T(¥phi(x_1)¥phi(x_2))|0>

(¥phi(x)は実スカラー場、粒子と反粒子が同一)
元の負エネルギー解は、あたかも時間を逆方向に伝播する粒子の
ように扱われています。
そのため、空間的な距離でも粒子が伝播する効果　∧、∨　(縦方向：時間、横方向：空間)
が生まれ、こういうことが可能になるのです（この描像は propagator を
経路積分で表すとわかりやすくなる)。
複素場の場合は、時間を逆向きの伝搬が反粒子を表している
という言い方もできます。
このように粒子の対消滅や対生成が（短い時間間隔で）起こり得るのは、
エネルギーと時間の間の不確定性関係が背後にあることは言うまでもありません。
また、実際の物理的な作用そのものも、時間の順序で起こり、
中間状態のエネルギーも正（ハミルトニアンは負固有値を持たない）
でなければならないので、最も直接的に物理的振幅を表すには
Feynman propagator を用いるのが相応しいわけです。
これこそが Feynman（と Dyson）が発見したことです。

これらに関係したことは、放送大学物理専門科目
「量子と統計の物理」の第１３章で
初等的な観点から論じてありますし、また

大学院科目「現代物理科学の論理と方法」第４章でも「力の
ポテンシャル」の導出において
関連した議論をしていますので、参考にしてください。

同じ KG 方程式のグリーン関数でも、Feynman propagator ではなく、
例えば、遅延グリーン関数

¥theta(t_1-t_2)<0|[¥phi(x_1),¥phi(x_2)]|0>

（¥theta(t)=0, for t<0, =1 otherwise)
ではそうではなく、光円錐の外で値がゼロになります。
この場合は、場の演算子の積に関して時間順序ではなく交換子
を用いているので、 t_1-t_2 に関して正負両方の振動数成分
が同等に寄与し、その結果、光円錐の外で <0|[¥phi(x_1),¥phi(x_2)]|0>
がゼロになります（局所可換性、「量子と統計の物理」問 13.1 参照）。
古典電磁気ではこのグリーン関数を使っています
（「場と時間空間の物理」第 12 章）。

ですから、

「ある位置のデルタ関数を核としたグリーン関数なので
粒子発生時に広がりをもつのですね。
もしも広がりがなくて局所的とすると質量とエネルギーが無限大になってしまうのですね。」

という単純な理解は十分に正確とは言えません。

[長井質問]
∧は空間的に離れた２点に存在する光子がある時間経過後に１点で対消滅する
∨はある１点で対発生した光子がある時間経過後に空間的に離れた２点に存在する
ことと解釈してよいでしょうか？
電子のようなフェルミオンの場合は
∧は空間的に離れた２点に存在する粒子と反粒子がある時間経過後に１点で対消滅する
∨はある１点で対発生した粒子と反粒子がある時間経過後に空間的に離れた２点に存在する
ことと解釈してよいでしょうか？

［米谷先生の回答］
そういう意味です。

［長井質問］
私はＴ積の真空期待値<0|T(φ(x)　φ(y)|>が Feynman propagator であり真空状態からある時
粒子が対発生してその後ある時に対消滅する確率振幅と考えていましたが
φ(y)はかならずしも対発生とは限らず対消滅の場合もありφ(x)から時間を遡ったり時間に従ったりして伝播した
反粒子がｙで消滅する経路も含まれるということでしょうか？

［米谷先生の回答］
場が１個作用して粒子　(or 反粒子）が１個多い状態になるか、１個減った状態になるという作用です。２個の場演算子積の真空期待値は、粒子を真空から１個生成させてから、また消滅させて真空に戻る確率振幅に表しています。
つまり、ここで明示されている演算子が直接対生成や対消滅の作用を
表すのではなく、途中の経路に対生成や対消滅の過程が重ね合わせられて
いるということです。前のメールに書いた「経路積分で表すと
わかりやすい」という意味はそういうことです。
このことをきちんと説明している本があるかどうか
調べたことがないのですが、私が以前ある出版社から
頼まれて途中まで書きかけたままで残してある場の理論の本の
原稿からその式を示すと、以下のように書けます。

$$\int_0^\infty d\tau \int [\mathcal{D}x(s)] \exp\Big(-\frac{1}{2}\int_0^\tau ds\big[\big(\frac{dx}{ds}\big)^2 + m^2\big]\Big)$$
$$= \int_0^\infty d\tau \langle x|\mathrm{e}^{-(-\Box+m^2)\tau}|y\rangle$$