Mark Srendnicki　Quantum Field Theory　　　　　　　ゼミ資料　長井鉄也

7章. 調和振動子のための経路積分

（6章を前提条件とする。）

ハミルトニアンを持つ調和振動子を考える

$$H(P,Q)=\tfrac{1}{2m}P^2+\tfrac{1}{2}m\omega^2Q^2\ . \qquad (7.1)$$

第6節の外力の存在下における基底状態から基底状態への状態遷移振幅の式を調和振動子の場合に特化することから始める。

$$\langle 0|0\rangle_f=\int \mathcal{D}p\,\mathcal{D}q\ \exp i\int_{-\infty}^{+\infty}dt\Big[p\dot{q}-(1-i\epsilon)H+fq\Big]\ . \qquad (7.2)$$

（7.1）を見ると、H に$1-i\varepsilon$ を掛けることは$m^{-1}\to(1-i\varepsilon)m^{-1}$

[または等価的に、$m\to(1+i\varepsilon)m$]と置き換えて、$m\omega^2\to(1-i\varepsilon)m\omega^2$となる。

次いで、ラグランジアンに渡すと、

$$\langle 0|0\rangle_f=\int D_q\exp i\int_{-\infty}^{+\infty}dt\left[m\dot{q}^2-\left((1-i\varepsilon)\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2+\frac{1}{2}m\omega^2q^2\right)\right)+fq\right]$$

$$=\int D_q\ \exp i\int_{-\infty}^{+\infty}dt\left[\frac{1}{2}(1+i\varepsilon)m\dot{q}^2-\frac{1}{2}(1-i\varepsilon)m\omega^2q^2+fq\right] \qquad (7.3)$$

これから、$m=1$に設定することによって記法を簡略化する。
次に、フーリエ変換された変数を使用して、

$$\tilde{q}(E)=\int_{-\infty}^{+\infty}dt\ e^{iEt}\,q(t)\ ,\qquad q(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{2\pi}\ e^{-iEt}\,\tilde{q}(E)\ . \qquad (7.4)$$

式中の大括弧内の式は、（7.3）が以下のようになる。

$$[\ldots]=\int_{-\infty}^{+\infty}dt\,\frac{dE}{2\pi}\frac{dE'}{2\pi}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}(1+i\varepsilon)(-iE)e^{-iEt}\tilde{q}(E)(-iE')e^{-iE't}\tilde{q}(E')-\frac{1}{2}(1-i\varepsilon)\omega^2e^{-iEt}\tilde{q}(E)e^{-iE't}\tilde{q}(E')\\+\frac{1}{2}e^{-iEt}\tilde{f}(E)e^{-iE't}\tilde{q}(E')+\frac{1}{2}e^{-iE't}\tilde{f}(E')e^{-iEt}\tilde{q}(E)\end{array}\right]$$

$$[\ldots]==\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{2\pi}\frac{dE'}{2\pi}e^{-i(E+E')t}\begin{bmatrix}\left(-(1+i\varepsilon)EE'-(1-i\varepsilon)\omega^2\right)\tilde{q}(E)\tilde{q}(E')\\ +\tilde{f}(E)\tilde{q}(E')+\tilde{f}(E')\tilde{q}(E)\end{bmatrix} \qquad (7.5)$$

唯一tの依存関係は今や prefactor（前因子）であることに注意しなさい。tで積分すると$2\pi\delta(E+E')$の係数を生成する。 その後、E'で積分することで簡単に 7.6 を得ることができる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dte^{-i(E+E')t}=2\pi\delta(E+E')$$ であり

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dE'\delta(E+E')=1$$ であってこのときE'は$-E$に置き換わるので

$$S=\int_{-\infty}^{+\infty}dt[\ldots]=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}dt\frac{dE}{2\pi}\frac{dE'}{2\pi}e^{-i(E+E')t}\begin{bmatrix}\left(-(1+i\varepsilon)EE'-(1-i\varepsilon)\omega^2\right)\tilde{q}(E)\tilde{q}(E')\\ +\tilde{f}(E)\tilde{q}(E')+\tilde{f}(E')\tilde{q}(E)\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{2\pi}\frac{dE'}{2\pi}2\pi\delta(E+E')\begin{bmatrix}\left(-(1+i\varepsilon)EE'-(1-i\varepsilon)\omega^2\right)\tilde{q}(E)\tilde{q}(E')\\ +\tilde{f}(E)\tilde{q}(E')+\tilde{f}(E')\tilde{q}(E)\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{2\pi}\begin{bmatrix}\left((1+i\varepsilon)E^2-(1-i\varepsilon)\omega^2\right)\tilde{q}(E)\tilde{q}(-E)\\ +\tilde{f}(E)\tilde{q}(-E)+\tilde{f}(-E)\tilde{q}(E)\end{bmatrix} \qquad (7,6)$$

大カッコ内の係数は$E^2-\omega^2+i\left(E^2+\omega^2\right)\varepsilon$に等しく、我々は

正の係数をεに吸収して$E^2-\omega^2+i\varepsilon$を得ることができる。
積分変数を次のように変更すると便利である。

$$\tilde{x}(E)=\tilde{q}(E)+\frac{\tilde{f}(E)}{E^2-\omega^2+i\epsilon}. \qquad (7.7)$$

そして次を得る。

$$S = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{2\pi}\left[\tilde{x}(E)(E^2-\omega^2+i\epsilon)\tilde{x}(-E) - \frac{\tilde{f}(E)\tilde{f}(-E)}{E^2-\omega^2+i\epsilon}\right]. \qquad (7.8)$$

証明(7, 7) (7, 8)より

$$S = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{2\pi}\left[\begin{array}{l}\left(\tilde{q}(E)+\frac{\tilde{f}(E)}{(E^2-\omega^2+i\varepsilon)}\right)(E^2-\omega^2+i\varepsilon)\left(\tilde{q}(-E)+\frac{\tilde{f}(-E)}{(E^2-\omega^2+i\varepsilon)}\right)\\ -\frac{\tilde{f}(E)\tilde{f}(-E)}{(E^2-\omega^2+i\varepsilon)}\end{array}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{2\pi}\left[\begin{array}{l}\tilde{q}(E)(E^2-\omega^2+i\varepsilon)\tilde{q}(-E)+\tilde{q}(E)\tilde{f}(-E)+\tilde{f}(E)\tilde{q}(-E)+\frac{\tilde{f}(E)\tilde{f}(-E)}{(E^2-\omega^2+i\varepsilon)}\\ -\frac{\tilde{f}(E)\tilde{f}(-E)}{(E^2-\omega^2+i\varepsilon)}\end{array}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{2\pi}\left[\tilde{q}(E)(E^2-\omega^2+i\varepsilon)\tilde{q}(-E)+\tilde{q}(E)\tilde{f}(-E)+\tilde{f}(E)\tilde{q}(-E)\right]$$

$(E^2-\omega^2+i\varepsilon)$を$((1+i\varepsilon)E^2-(1-i\varepsilon)\omega^2)$に置き換えて

$$S == \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{2\pi}\left[((1+i\varepsilon)E^2-(1-i\varepsilon)\omega^2)\tilde{q}(E)\tilde{q}(-E)+\tilde{q}(E)\tilde{f}(-E)+\tilde{f}(E)\tilde{q}(-E)\right] \quad (7,6)$$

さらに（7.7）はDqをDxへと定数だけシフトさせたものなので

$$\langle 0|0\rangle_f = \exp\left[\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{2\pi}\frac{\tilde{f}(E)\tilde{f}(-E)}{-E^2+\omega^2-i\epsilon}\right] \times\int\mathcal{D}x\ \exp\left[\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{2\pi}\tilde{x}(E)(E^2-\omega^2+i\epsilon)\tilde{x}(-E)\right]. \quad (7.9)$$

となる。

ここが重要なポイントになる。（7.9）の 2行目の経路積分は、$f=0$の場合に$\langle 0\|0\rangle_f$に対して

得られるものである。一方、外力がなければ、基底状態のシステムは

依然として基底状態のままとなるので、$\langle 0\|0\rangle_{(f=0)}=1$となる。したがって、$\langle 0\|0\rangle_f$は式(7.9)

の一行目から得られる。

$$\langle 0|0\rangle_f = \exp\left[\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{2\pi}\frac{\tilde{f}(E)\tilde{f}(-E)}{-E^2+\omega^2-i\epsilon}\right]. \qquad (7.10)$$

$\langle 0\|0\rangle_f$ を時間領域変数の形で書き直すこともできる。

$$\langle 0|0\rangle_f = \exp\left[\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\,dt'\, f(t)G(t-t')f(t')\right], \qquad (7.11)$$

–

ただし

$$G(t-t') = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{2\pi}\frac{e^{-iE(t-t')}}{-E^2+\omega^2-i\epsilon}. \qquad (7.12)$$

$G(t-t')$ は振動子の運動方程式のグリーン関数であることに注意しなさい。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega^2\right)G(t-t') = \delta(t-t'). \qquad (7.13)$$

（導出は問題7.2）

これは（7.12）式を（7.13）式に代入して直接見ることができる。その後

$\varepsilon \to 0$ の限界をとる。

（7.12）の右辺のEに対する積分を複素線積分として行うことで留数定理により $G(t-t')$ を明示的に求めることが出来る。

結果は次のとおり。

$$G(t-t') = \frac{i}{2\omega}\exp\left(-i\omega|t-t'|\right). \qquad (7.14)$$

（導出は問題7.1）

ここで、6章から演算子の時間秩序積の式を考えてみよう

初期状態および終状態が基底状態の場合、

$$\langle 0|\mathrm{T}Q(t_1)\ldots|0\rangle = \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta f(t_1)}\ldots\langle 0|0\rangle_f\Big|_{f=0}. \qquad (7.15)$$

我々の明示的な式を使用して （7.11）、我々は

$$
\begin{aligned}
\langle 0|\mathrm{T}Q(t_1)Q(t_2)|0\rangle &= \frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta f(t_1)}\,\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta f(t_2)}\,\langle 0|0\rangle_f\Big|_{f=0} \\
&= \frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta f(t_1)}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, G(t_2-t')f(t')\right]\langle 0|0\rangle_f\Big|_{f=0} \\
&= \left[\tfrac{1}{i}G(t_2-t_1) + (\text{term with } f\text{'s})\right]\langle 0|0\rangle_f\Big|_{f=0} \\
&= \tfrac{1}{i}G(t_2-t_1)\,. \qquad (7.16)
\end{aligned}
$$

（導出は問題7.3c）

このようにしてより多くの$Q(t)$の時間順序積の基底状態期待値を計算することができます。
$Q(t)$の数が奇数の場合、prefactor（前因子）には常に残りの$f(t)$が存在するため、結果は。ゼロ。 $Q(t)$の数が偶数であれば、汎関数微分を適切な方法で使用して、非ゼロの結果を得る。従って、例えば、

$$
\begin{aligned}
\langle 0|\mathrm{T}Q(t_1)Q(t_2)Q(t_3)Q(t_4)|0\rangle = \frac{1}{i^2}\Big[&G(t_1-t_2)G(t_3-t_4) \\
&+ G(t_1-t_3)G(t_2-t_4) \\
&+ G(t_1-t_4)G(t_2-t_3)\Big]. \qquad (7.17)
\end{aligned}
$$

（導出は問題7.3c）

さらに一般的には

$$
\langle 0|\mathrm{T}Q(t_1)\ldots Q(t_{2n})|0\rangle = \frac{1}{i^n}\sum_{\text{pairings}} G(t_{i_1}-t_{i_2})\ldots G(t_{i_{2n-1}}-t_{i_{2n}})\,. \quad (7.18)
$$

問題

問題 7.1　(7.12)式から始めて contour integral(線積分)により(7.14)式を求めよ。

$$G(t-t')=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{2\pi}\left[\frac{e^{-iE(t-t')}}{-E^2+\omega^2-i\varepsilon}\right]$$

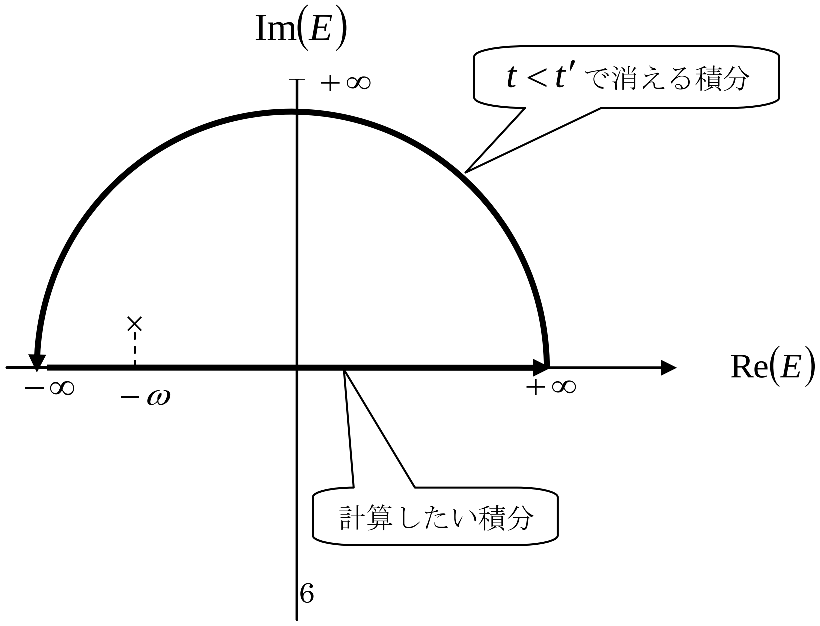
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{2\pi}\left[\frac{e^{-iE(t-t')}}{-(E+\omega-i\varepsilon)(E-\omega+i\varepsilon)}\right]$$

$t<t'$ で消える積分

$t<t'$ の場合を考える。

E の実部と虚部の状態に依存して上記 $[\ldots]$ は以下のようになる。

		$\mathrm{Re}(E)$		
		$-\infty$	有限	$+\infty$
$\mathrm{Im}(E)$	$+\infty$	$\left[\frac{+0}{-\infty}\right]=-0$	$\left[\frac{+0}{-\infty}\right]=-0$	$\left[\frac{+0}{-\infty}\right]=-0$
	有限	$\left[\frac{有限}{-\infty}\right]=\pm 0$	$\left[\frac{有限}{有限}\right]=有限$	$\left[\frac{有限}{-\infty}\right]=\pm 0$
	$-\infty$	$\left[\frac{+\infty}{-\infty}\right]$	$\left[\frac{+\infty}{-\infty}\right]$	$\left[\frac{+\infty}{-\infty}\right]$



$-\infty$

円弧の経路（$t<t'$で消える積分）を加えても積分の結果は変わらないので周回積分に置き換えることが出来る。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{2\pi}\to\oint\frac{dE}{2\pi}$$

留数定理

aに極があるとき

$$\oint_{z=a\text{の周りを反時計周り}} dzf(z) \quad = 2\pi i\lim_{z\to a}(z-a)f(z)$$

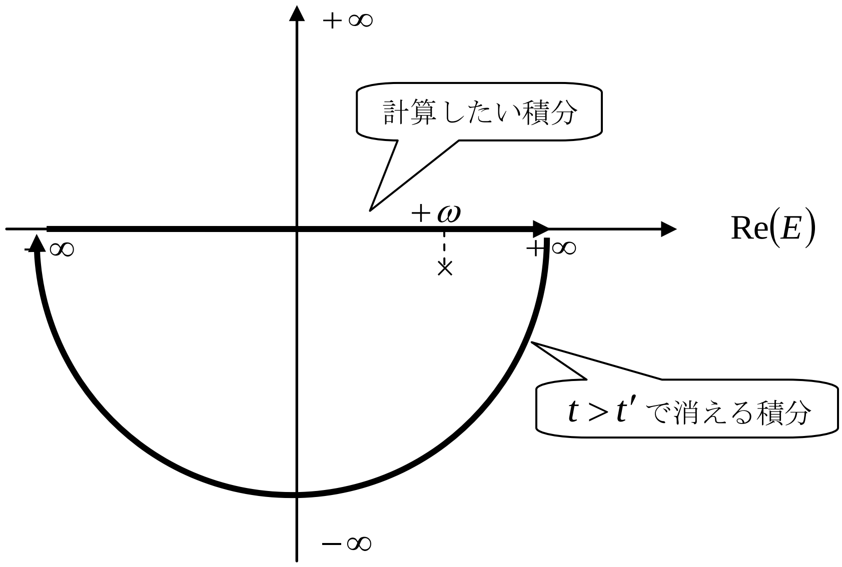
時計周りのときは結果に(−1)が加算される。

$t<t'$のとき$z=-\omega$の周りを反時計周りの経路をとるので

$$G(t-t')=\oint\frac{dE}{2\pi}\left[\frac{e^{-iE(t-t')}}{-(E+\omega-i\varepsilon)(E-\omega+i\varepsilon)}\right]$$

$$=2\pi i\lim_{E\to-\omega}(E+\omega)\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-iE(t-t')}}{-(E+\omega)(E-\omega)}\right]=\frac{i}{2\omega}\exp\left(i\omega(t-t')\right)$$

$t>t'$のとき$E=+\omega$の周りを時計周りの経路をとるので



$$G(t-t')=\oint \frac{dE}{2\pi}\left[\frac{e^{-iE(t-t')}}{-(E+\omega-i\varepsilon)(E-\omega+i\varepsilon)}\right]$$

$$=-2\pi i \lim_{E\to+\omega}(E-\omega)\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-iE(t-t')}}{-(E+\omega)(E-\omega)}\right]=\frac{i}{2\omega}\exp\left(-i\omega(t-t')\right)$$

従って $G(t-t')=\dfrac{i}{2\omega}\exp\left(-i\omega|t-t'|\right)$ 　となって　式(7.14)と一致する。

問題7.2　(7.14)式から(7.13)式を確認せよ

$$G(t-t')=\frac{i}{2\omega}\exp\left(-i\omega|t-t'|\right) \qquad (7.14)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t}+\omega^2\right)G(t-t')=\left(\frac{\partial^2}{\partial t}+\omega^2\right)\left(\frac{i}{2\omega}\exp\left(-i\omega|t-t'|\right)\right)$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{i}{2\omega}(-i\omega)(-1+2\theta(t-t'))\exp\left(-i\omega|t-t'|\right)\right)+\left(\omega^2\frac{i}{2\omega}\exp\left(-i\omega|t-t'|\right)\right)$$

$$=\left(\delta(t-t')\exp\left(-i\omega|t-t'|\right)\right)+\left(\frac{1}{2}(-1+2\theta(t-t'))\exp\left(-i\omega|t-t'|\right)\right)$$

$$+\left(\frac{i\omega}{2}\exp\left(-i\omega|t-t'|\right)\right)$$

$$=\delta(t-t')+\left(\frac{-i\omega}{2}\left(1+4\theta(t-t')-4(\theta(t-t'))^2\right)\exp\left(-i\omega|t-t'|\right)\right)$$

$$+\left(\frac{i\omega}{2}\exp\left(-i\omega|t-t'|\right)\right)$$

従って

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t}+\omega^2\right)G(t-t')=\delta(|t-t'|) \qquad (7.13)$$

問題7.3) a) ハイゼンベルクの運動方程式 $\dot{A}=i[H,A]$ を使って $\dot{Q}$ と $\dot{P}$ の明確な説明を見つけなさい。

それらを解いてハイゼンベルク描像での演算子 $P(t)$　$Q(t)$ をシュレーディンガー描像での演算子 P　Q から求めなさい。

$$\dot{P}(t)=\frac{\partial}{\partial t}P(t)=i[H(t),P(t)]$$

$$\dot{Q}(t)=\frac{\partial}{\partial t}Q(t)=i[H(t),Q(t)]$$

これらの解として

$$P(t)=e^{iHt}Pe^{-iHt}$$

$$Q(t)=e^{iHt}Qe^{-iHt}$$

証明

$$\dot{P}(t)=\frac{\partial}{\partial t}P(t)=\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{iHt}Pe^{-iHt}\right)$$

$$=iHe^{iHt}Pe^{-iHt}+e^{iHt}Pe^{-iHt}(-iH)$$

$$=iHe^{iHt}Pe^{-iHt}+e^{iHt}Pe^{-iHt}(-iH)$$

$$=i\left(e^{iHt}HPe^{-iHt}-e^{iHt}PHe^{-iHt}\right)$$

$$=i\left(e^{iHt}He^{-iHt}e^{iHt}Pe^{-iHt}-e^{iHt}Pe^{-iHt}e^{iHt}He^{-iHt}\right)$$

$$=i[H(t),P(t)]$$

$\dot{Q}(t)$ についても同様

問題7.3b)

シュレーディンガー描像の演算子QとPを生成消滅演算子a　と$a^\dagger$で示しなさい。

ただし$H=\hbar\omega\left(a^\dagger a+\frac{1}{2}\right)$　　さらに（a)の結果を元にハイゼンベルク描像の演算子$Q(t)$と

$P(t)$を　aと$a^\dagger$により示しなさい。

$$a=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}Q+\frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}P$$

$$a^\dagger=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}Q-\frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}P$$

とすると

$$a-a^\dagger=\frac{2i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}P$$

$$P=\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(a-a^\dagger\right)$$

$$a+a^\dagger=\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}Q$$

$$Q=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a+a^\dagger\right)$$

$$.\ H=\hbar\omega\left(a^\dagger a+\frac{1}{2}\right)=\hbar\omega\left(\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}Q-\frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}P\right)\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}Q+\frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}P\right)+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\hbar\omega\left(\frac{m\omega}{2\hbar}Q^2+\frac{1}{2m\hbar\omega}P^2+\frac{i}{2\hbar}[Q,P]+\frac{1}{2}\right)=\hbar\omega\left(\frac{m\omega}{2\hbar}Q^2+\frac{1}{2m\hbar\omega}P^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2m}P^2+\frac{m\omega^2}{2}Q^2\right)$$

ただしここでは$[Q,P]=i\hbar$

$$P(t)=e^{iHt}Pe^{-iHt}=\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}e^{iHt}\left(a-a^\dagger\right)e^{-iHt}$$

$$Q(t)=e^{iHt}Qe^{-iHt}=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}e^{iHt}\left(a+a^\dagger\right)e^{-iHt}$$

問題7.3c)　(b)の結果と $a|0\rangle = \langle 0|a^{\dagger} = 0$ をもとに(7.16)式と (7.17)式を確認しなさい。

$a|0\rangle = \langle 0|a^{\dagger} = 0$ より $\langle 0|a^{\dagger}a|0\rangle = 0$

問題7.3bより

$$\langle 0|[P,Q]|0\rangle = \langle 0|\left[\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(a-a^{\dagger}\right), \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a+a^{\dagger}\right)\right]|0\rangle$$

$$= -\frac{\hbar i}{2}\langle 0|\left(\left(aa - a^{\dagger}a^{\dagger} + aa^{\dagger} - a^{\dagger}a\right) - \left(aa - a^{\dagger}a^{\dagger} - aa^{\dagger} + a^{\dagger}a\right)\right)|0\rangle$$

$$= -\hbar i\langle 0|\left(+aa^{\dagger} - a^{\dagger}a\right)|0\rangle$$

$$= -\hbar i$$

ただし $\langle 0|aa^{\dagger}|0\rangle = 1$　　　を使用している。

7.16左辺に $\left(\frac{\partial^2}{\partial {t_1}^2} + \omega^2\right)$ を作用させると

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial {t_1}^2} + \omega^2\right)\langle 0|TQ(t_1)Q(t_2)|0\rangle = \left(\frac{\partial^2}{\partial {t_1}^2} + \omega^2\right)\langle 0|\theta(t_1 - t_2)\left(Q(t_1)Q(t_2)\right) + \theta(t_2 - t_1)\left(Q(t_1)Q(t_2)\right)|0\rangle$$

$$= \langle 0|\begin{pmatrix} \omega^2\theta(t_1 - t_2)\left(Q(t_1)Q(t_2)\right) + \omega^2\theta(t_2 - t_1)\left(Q(t_2)Q(t_1)\right) \\ + \frac{\partial}{\partial t_1}\begin{pmatrix} \delta(t_1 - t_2)\left(Q(t_1)Q(t_2)\right) - \delta(t_2 - t_1)\left(Q(t_2)Q(t_1)\right) \\ + \theta(t_1 - t_2)\left(\frac{1}{m}P(t_1)Q(t_2)\right) + \theta(t_2 - t_1)\left(\frac{1}{m}Q(t_2)P(t_1)\right) \end{pmatrix} \end{pmatrix}|0\rangle$$

$$
=\langle 0|\begin{pmatrix}
\omega^2\theta(t_1-t_2)(Q(t_1)Q(t_2))+\omega^2\theta(t_2-t_1)(Q(t_2)Q(t_1)) \\
+\delta(t_1-t_2)\left(-\frac{\partial}{\partial t_1}Q(t_1)Q(t_2)\right)-\delta(t_2-t_1)\left(-Q(t_2)\frac{\partial}{\partial t_1}Q(t_1)\right) \\
+\delta(t_1-t_2)\left(\frac{\partial}{\partial t_1}Q(t_1)Q(t_2)\right)-\delta(t_2-t_1)\left(Q(t_2)\frac{\partial}{\partial t_1}Q(t_1)\right) \\
+\delta(t_1-t_2)\left(\frac{1}{m}P(t_1)Q(t_2)\right)-\delta(t_2-t_1)\left(\frac{1}{m}Q(t_2)P(t_1)\right) \\
+\theta(t_1-t_2)\left(\frac{-m\omega^2}{m}Q(t_1)Q(t_2)\right)+\theta(t_2-t_1)\left(\frac{-m\omega^2}{m}Q(t_2)Q(t_1)\right)
\end{pmatrix}|0\rangle
$$

$$
=\langle 0|\left(+\delta(t_1-t_2)\left(\frac{1}{m}P(t_1)Q(t_2)\right)-\delta(t_2-t_1)\left(Q(t_2)\frac{1}{m}P(t_1)\right)\right)|0\rangle
$$

$$
=\langle 0|\left(+\delta(t_1-t_2)\left(\frac{1}{m}[P(t_1),Q(t_2)]\right)\right)|0\rangle
$$

$$
=\langle 0|\left(+\delta(t_1-t_2)\left(\frac{1}{m}\left[e^{iHt_1}Pe^{-iHt_1},e^{iHt_2}Qe^{-iHt_2}\right]\right)\right)|0\rangle
$$

$$
=\langle 0|\left(+\delta(t_1-t_2)\left(\frac{1}{m}[P,Q]\right)\right)|0\rangle
$$

$$
=\langle 0|\left(+\delta(t_1-t_2)\left(-\frac{1}{m}i\hbar\right)\right)|0\rangle
$$

$$
=\frac{1}{i}\delta(t_1-t_2)
$$

ただし$\frac{\partial}{\partial t}P(t)=-m\omega^2Q(t)$　　$\frac{\partial}{\partial t}Q(t)=\frac{P}{m}$　　$\delta(t_1-t_2)=\delta(t_2-t_1)$

$\frac{\partial}{\partial x}\delta x f(x)=-\delta x\frac{\partial f(x)}{\partial x}$　　$\hbar=1$　　$m=1$を使用している。

$\frac{\partial}{\partial t}P(t)=-m\omega^2Q(t)$　　は以下から得ている。

$$
\dot{P}(t)=i[H,P(t)]=i\left[\frac{1}{2m}P(t)^2+\frac{1}{2}m\omega^2Q(t)^2,P(t)\right]
$$

$$=\frac{i}{2m}P(t)^3+\frac{i}{2}m\omega^2Q(t)^2P(t)-\left(\frac{i}{2m}P(t)^3+\frac{1}{2}m\omega^2PQ(t)^2\right)$$

$$=\frac{i}{2}m\omega^2\left[Q(t)^2,P(t)\right]$$

$$=-\frac{i}{2}m\omega^2\left[P(t),Q(t)^2\right]=-\frac{i}{2}m\omega^2\left([P(t),Q(t)]Q(t)+Q[P(t),Q(t)]\right)$$

$$=-\frac{i}{2}m\omega^2\left(-iQ(t)-Q(t)i\right)$$

$$=-m\omega^2Q(t)$$

ただしライプニッツ則と $[Q(t),P(t)]=i$ を使用している。

ライプニッツ則

$$[A,BC]=[A,B]C+B[A,C]$$

$\frac{\partial}{\partial t}Q(t)=\frac{P(t)}{m}$ 　も同様に

$$\dot{Q}(t)=i[H,Q(t)]=i\left[\frac{1}{2m}P(t)^2+\frac{1}{2}m\omega^2Q(t)^2,Q(t)\right]$$

$$=\frac{i}{2m}P(t)^2Q(t)+\frac{i}{2}m\omega^2Q(t)^3-\left(\frac{i}{2m}Q(t)P(t)^2+\frac{1}{2}m\omega^2Q(t)^3\right)$$

$$=\frac{i}{2m}\left[P(t)^2,Q(t)\right]=\frac{-i}{2m}\left[Q(t),P(t)^2\right]=\frac{-i}{2m}\left([Q(t),P(t)]P(t)+P[Q(t),P(t)]\right)$$

$$=\frac{-i}{2m}\left(iP(t)+P(t)i\right)$$

$$=\frac{P(t)}{m}$$

一方，式(7.16)右辺に $\left(\frac{\partial^2}{\partial t_1{}^2}+\omega^2\right)$ を作用させると式(7.13)より

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t_1{}^2}+\omega^2\right)\frac{1}{i}G(t_1-t_2)=\frac{1}{i}\delta(t_1-t_2)$$

となって一致するので式(7.16)の正しさが確認できた。

式(7.17)左辺に $\left(\frac{\partial^2}{\partial t_1{}^2}+\omega^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t_2{}^2}+\omega^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t_3{}^2}+\omega^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t_4{}^2}+\omega^2\right)$ を作用させると

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial {t_1}^2}+\omega^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial {t_2}^2}+\omega^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial {t_3}^2}+\omega^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial {t_4}^2}+\omega^2\right)\langle 0|TQ(t_1)Q(t_2)Q(t_3)Q(t_4)|0\rangle$$

$$=\left(\frac{\partial^2}{\partial {t_1}^2}+\omega^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial {t_2}^2}+\omega^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial {t_3}^2}+\omega^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial {t_4}^2}+\omega^2\right)$$

$$\langle 0|\begin{pmatrix}\theta(t_1-t_3)\theta(t_1-t_4)\theta(t_2-t_3)\theta(t_2-t_4)(TQ(t_1)Q(t_2))(TQ(t_3)Q(t_4)) \\ +\theta(t_1-t_2)\theta(t_1-t_4)\theta(t_3-t_2)\theta(t_3-t_4)(TQ(t_1)Q(t_3))(TQ(t_2)Q(t_4)) \\ +\theta(t_1-t_2)\theta(t_1-t_3)\theta(t_4-t_2)\theta(t_4-t_3)(TQ(t_1)Q(t_4))(TQ(t_2)Q(t_3))\end{pmatrix}|0\rangle$$

$$=\frac{2}{i^2}\begin{pmatrix}\delta(t_1-t_2)\delta(t_3-t_4) \\ +\delta(t_1-t_3)\delta(t_2-t_4) \\ +\delta(t_1-t_4)\delta(t_2-t_3)\end{pmatrix}$$

一方7. 17右辺に$\left(\frac{\partial^2}{\partial {t_1}^2}+\omega^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial {t_2}^2}+\omega^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial {t_3}^2}+\omega^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial {t_4}^2}+\omega^2\right)$を作用させると

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial {t_1}^2}+\omega^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial {t_2}^2}+\omega^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial {t_3}^2}+\omega^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial {t_4}^2}+\omega^2\right)\frac{2}{i^2}\begin{pmatrix}G(t_1-t_2)G(t_3-t_4) \\ +G(t_1-t_3)G(t_2-t_4) \\ +G(t_1-t_4)G(t_2-t_3)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{2}{i^2}\begin{pmatrix}\delta(t_1-t_2)\delta(t_3-t_4) \\ +\delta(t_1-t_3)\delta(t_2-t_4) \\ +\delta(t_1-t_4)\delta(t_2-t_3)\end{pmatrix}$$

となって一致するので式(7. 17)の正しさが確認できた。ただし時間順序積の奇数個どうしの組み合わせに関する項がゼロになることを利用している。

一例を挙げると

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial {t_1}^2}+\omega^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial {t_2}^2}+\omega^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial {t_3}^2}+\omega^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial {t_4}^2}+\omega^2\right)$$

$$\langle 0|\theta(t_1-t_2)\theta(t_1-t_3)\theta(t_1-t_4)(Q(t_1)(TQ(t_2)Q(t_3)Q(t_4)))|0\rangle$$

$$=\left(\frac{\partial^2}{\partial {t_1}^2}+\omega^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial {t_2}^2}+\omega^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial {t_3}^2}+\omega^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial {t_4}^2}+\omega^2\right)$$

$$\langle 0|\theta(t_1-t_2)\theta(t_1-t_3)\theta(t_1-t_4)(Q(t_1)(TQ(t_2)Q(t_3)Q(t_4)))|0\rangle$$

$$=\left(\frac{\partial^2}{\partial t_2{}^2}+\omega^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t_3{}^2}+\omega^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t_4{}^2}+\omega^2\right)$$

$$\langle 0|\left(\begin{array}{l}\omega^2\theta(t_1-t_2)\theta(t_1-t_3)\theta(t_1-t_4)(Q(t_1)(TQ(t_2)Q(t_3)Q(t_4)))\\ +\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\begin{array}{l}\delta(t_1-t_2)\theta(t_1-t_3)\theta(t_1-t_4)(Q(t_1)(TQ(t_2)Q(t_3)Q(t_4)))\\ +\theta(t_1-t_2)\theta(t_1-t_3)\theta(t_1-t_4)\left(\frac{1}{m}P(t_1)(TQ(t_2)Q(t_3)Q(t_4))\right)\end{array}\right)\end{array}\right)|0\rangle$$

$$=\left(\frac{\partial^2}{\partial t_2{}^2}+\omega^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t_3{}^2}+\omega^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t_4{}^2}+\omega^2\right)$$

$$\langle 0|\left(\begin{array}{l}\omega^2\theta(t_1-t_2)\theta(t_1-t_3)\theta(t_1-t_4)(Q(t_1)(TQ(t_2)Q(t_3)Q(t_4)))\\ \left(\begin{array}{l}\delta(t_1-t_2)\theta(t_1-t_3)\theta(t_1-t_4)\left(-\frac{1}{m}P(t_1)(TQ(t_2)Q(t_3)Q(t_4))\right)\\ +\delta(t_1-t_2)\theta(t_1-t_3)\theta(t_1-t_4)\left(\frac{1}{m}P(t_1)(TQ(t_2)Q(t_3)Q(t_4))\right)\\ +\theta(t_1-t_2)\theta(t_1-t_3)\theta(t_1-t_4)\left(\frac{-m\omega^2}{m}(TQ(t_2)Q(t_3)Q(t_4))\right)\end{array}\right)\end{array}\right)|0\rangle$$

$$=0$$

ただし $\frac{\partial}{\partial t}P(t)=-m\omega^2Q(t)$ $\quad\frac{\partial}{\partial t}Q(t)=\frac{P(t)}{m}$ $\quad\frac{\partial}{\partial x}\delta x f(x)=-\delta x\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ $\quad\hbar=1$

$m=1$ を使用している。

問題7.4)　$t=-\infty$ における基底状態にある調和振動子を考えて外力が $f(t)$ である場合に

$t=+\infty$ において調和振動子が依然として基底状態にある確率 $\left|\langle 0\|0\rangle_f\right|^2$ を計算せよ。

明らか（manifestly）に実際の説明として答えを書きなさい。そしてフーリエ変換

$\tilde{f}(E)=\int_{-\infty}^{+\infty}dte^{iEt}f(t)$ を用いなさい。

他の評価されていない積分を用いてはならない。（Your answer should not involve any other unevaluated integrals.）

7.11に7.14を代入し

$$\left|\langle 0\|0\rangle_f\right|=\exp\left[\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}dtdt'f(t)\frac{i}{2\omega}\exp\left(-i\omega|t-t'|\right)f(t')\right]$$

$$=\exp\left[\frac{-1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}dtdt'f(t)\frac{1}{2\omega}\exp\left(-i\omega|t-t'|\right)f(t')\right]$$

a を複素数とすると $\left|\exp[a]\right|^2 = \exp[2\,\mathrm{Re}(a)]$

$$\left|\langle 0\|0\rangle_f\right|^2 = \exp\left[2\,\mathrm{Re}\left(\frac{-1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt dt' f(t)\frac{1}{2\omega}\exp\left(-i\omega|t-t'|\right)f(t')\right)\right]$$

$t > t'$ のとき

$$\left|\langle 0\|0\rangle_f\right|^2 = \exp\left[2\,\mathrm{Re}\left(\frac{-1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt dt' f(t)\frac{1}{2\omega}\exp\left(-i\omega(t-t')\right)f(t')\right)\right]$$

$$= \exp\left[2\,\mathrm{Re}\left(\frac{-1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt dt' f(t)\frac{1}{2\omega}\exp\left(-i\omega(t)\right)\exp\left(i\omega(t')\right)f(t')\right)\right]$$

$$= \exp\left[2\,\mathrm{Re}\left(\frac{-1}{2}\frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp\left(-i\omega(t)\right)f(t)\int_{-\infty}^{+\infty} dt' \exp\left(i\omega(t')\right)f(t')\right)\right]$$

$$= \exp\left(-\frac{\tilde{f}(E)\tilde{f}^*(E)}{2\omega}\right)$$

$t < t'$ のとき

$$\left|\langle 0\|0\rangle_f\right|^2 = \exp\left[2\,\mathrm{Re}\left(\frac{-1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt dt' f(t)\frac{1}{2\omega}\exp\left(i\omega(t-t')\right)f(t')\right)\right]$$

$$= \exp\left[2\,\mathrm{Re}\left(\frac{-1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt dt' f(t)\frac{1}{2\omega}\exp\left(i\omega(t)\right)\exp\left(-i\omega(t')\right)f(t')\right)\right]$$

$$= \exp\left[2\,\mathrm{Re}\left(\frac{-1}{2}\frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp\left(i\omega(t)\right)f(t)\int_{-\infty}^{+\infty} dt' \exp\left(-i\omega(t')\right)f(t')\right)\right]$$

$$= \exp\left(-\frac{\tilde{f}(E)\tilde{f}^*(E)}{2\omega}\right)$$

従って答えは $\left|\langle 0\|0\rangle_f\right|^2 = \exp\left(-\frac{\tilde{f}(E)\tilde{f}^*(E)}{2\omega}\right)$