

ポルン-インフェルトの非線形理論について

長井鉄也 (122-822347-3)

放送大学大学院 文化科学研究課

自然環境科学プログラム

研究指導責任者 米谷 民明 客員教授

2017年12月 提出

2018年5月 一部修正

修士論文要旨

学生氏名 長井鉄也
所属プログラム 自然環境科学
学生番号 122-822347-3

ボルン-インフェルトの非線形理論について

要旨

非線形電磁気学理論の代表例としてボルン-インフェルトの非線形理論が知られている。ボルン-インフェルト理論はそれを提唱した物理学者マックス・ボルンとレオポルト・インフェルトにちなんで命名された。

電子を点電荷とするとその周囲の電界はマックスウェル方程式に従って無限大になり電磁エネルギーも無限大になるという困難がある。

これを解決するためミーはマックスウェル理論を非線形化することを試みているがゲージ不変性を満たしていなかった。これに対し、ボルンとインフェルトはゲージ不変性も満足するラグランジアンを提案し解決させた。1934年にボルンとインフェルトは「Foundations of the New Field Theory」という論文を発表しており現在ではボルン-インフェルト理論と呼ばれている。

今回、私はこの論文を読み以下の内容について取り上げ、それぞれに考察を行った。

- (1) 作用関数の仮定と時間空間座標変換における共変性について
- (2) Maxwell 方程式との一致
- (3) エネルギー運動量テンソルの導出
- (4) 場の方程式の静的解
- (5) エネルギーが有限になるメカニズム
- (6) 電荷密度の定義とその性質
- (7) 粒子の運動方程式の導出
- (8) 波長の減少に伴う実効電荷の減少
- (9) 現在におけるボルン-インフェルト理論への評価
- (10) 偏微分方程式による平面波解
- (11) 平面波解の証明
- (12) パルス・ソリトン解

目次

第1章 研究の背景と目的	1
第2章 ボルン-インフェルト理論	2
2.1 ボルン-インフェルト理論の概要	2
2.2 作用関数の仮定と時間空間座標変換における共変性について	4
2.3 マックスウェル方程式との一致	7
2.4 エネルギー-運動量テンソルの導出	14
2.5 場の方程式の静的解	16
2.6 エネルギーが有限になるメカニズム	19
2.7 電荷密度の定義とその性質	22
2.8 粒子の運動方程式の導出	24
2.9 波長の減少に伴う実効電荷の減少	30
2.10 現在におけるボルン-インフェルト理論への評価	32
第3章 Born Infeld Equation	33
3.1 偏微分方程式による平面波解	33
3.2 平面波解の証明	34
3.3 パルス・ソリトン解	37
第4章 まとめ	38
謝辞	39
参考文献	39

第1章 研究の背景と目的

私は個人的に非線形現象に対して強い関心を持っている。生命現象や自然現象の中には多くの興味深い非線形現象があり、工学的にも多くの応用例が知られている。担当の米谷教授に相談したところ非線形電磁気学理論の代表例としてボルン-インフェルトの非線形理論が知られているので研究することを勧められ、これを研究することにした。

ボルン-インフェルト理論はそれを提唱した物理学者マックス・ボルンとレオポルト・インフェルトにちなんで命名された。

電子を点電荷とするとその周囲の電界はマックスウェル方程式に従って無限大になり電磁エネルギーも無限大になるという困難がある。

これを解決するためミーはマックスウェル理論を非線形化することを試みているがゲージ不変性を満たしていなかった。これに対し、ボルンとインフェルトはゲージ不変性も満足するラグランジアンを提案し解決させた。1934年にボルンとインフェルトは「Foundations of the New Field Theory」という論文を発表しており現在ではボルン-インフェルト理論と呼ばれている。それはどのような論文だったのだろうか？ 現在どのように評価されているのだろうか？ 調査してみることにした。

Foundations of the New Field Theory.

By M. BORN and L. INFELD,† Cambridge.

(Communicated by R. H. Fowler, F.R.S.—Received January 26, 1934.)

§ 1. *Introduction.*

The relation of matter and the electromagnetic field can be interpreted from two opposite standpoints :—

The first which may be called the *unitarian standpoint*‡ assumes only *one* physical entity, the electromagnetic field. The particles of matter are considered as singularities of the field and mass is a derived notion to be expressed by field energy (electromagnetic mass).

The second or *dualistic standpoint* takes field and particle as two essentially different agencies. The particles are the sources of the field, are acted on by the field but are not a part of the field ; their characteristic property is inertia measured by a specific constant, the mass.

At the present time nearly all physicists have adopted the dualistic view, which is supported by three facts.

図 1-1 Foundations of the New Field Theory (冒頭)
(Royal Society Publishing)

第2章 ボルン-インフェルト理論

2.1 ボルン-インフェルト理論の概要

電子をアブラハム・ローレンツ模型のように半径 a の球殻電荷として考えると

電荷 $q = -e$ はクーロンの法則に従ってその周囲に電場 $E_r = q/4\pi\epsilon_0 r^2$ を作る。

電場のエネルギーは $U = 4\pi \int_a^\infty dr r^2 \frac{1}{2} \epsilon_0 E_r^2 = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$ となる。

点電荷の場合は $a \rightarrow 0$ とすると U は無限大になるという発散の困難がある。

これを解決するためミーはマックスウェル理論を非線形化することを試みているがゲージ不変性を満たしていなかった。これに対し、ボルンとインフェルトは一般座標変換の下で不変な量で表すことでゲージ不変性も満足するラグランジアンを

提案した。彼らは相対論における作用 $mc^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)$ において速度 v が光速を超えないことに着目した。ただし現在では作用に含まれる定数 $mc^2(1)$ は変分を求める上

では必要が無いと見做す $-mc^2 \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)$ とするのが一般的となっている。(「現代物理科学の論理と方法」11.1章) [3]

この作用のニュートン近似は $v^2 \ll c^2$ として

$$mc^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) \cong mc^2 \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) \right) = \frac{1}{2} mv^2$$

となるが、これと電磁場のラグランジアン $L = \frac{1}{2} (H^2 - E^2)$ と対比させて当てはめて

このラグランジアンを $L = b^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{b^2} (H^2 - E^2)} - 1 \right)$ (1.2) と変形した。ただしここ

では H 、 E は原文によれば磁場と電場の空間ベクトル。式番号は原文と同じ。

$\frac{1}{b^2} (H^2 - E^2) \ll 1$ とすると

$$L = b^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{b^2} (H^2 - E^2)} - 1 \right) \cong b^2 \left(\left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{b^2} (H^2 - E^2) \right) - 1 \right) = \frac{1}{2} (H^2 - E^2) \quad (1.1)$$

となって電磁場のラグランジアンと一致する。

速度 v が光速を超えないことと対比させて電界強度 E が一定の有限の値を超えないような状況が出来ると考えた。

1934年にボルンとインフェルトは「Foundations of the New Field Theory」という論文を発表しており現在ではボルン、インフェルト理論と呼ばれている。この理論は非線形理論であるが粒子の半径から十分に離れた領域ではラグランジアンは

$$L = F = \frac{1}{b^2} (B^2 - E^2)$$

となって線系のマックスウェル方程式と整合し線系理論となる。

2.2 作用関数の仮定と時間空間座標変換における共変性について

一般相対原理によれば重力の効果により時間空間の幾何学が変化する。この時空の変化を一般座標変換と呼び、一般相対論では作用積分は一般座標変換の下で不変になる理論になっている。（「場と時間空間の物理 14.3 章」 [3]）

ボロン、インフェルト理論が最小作用原理と一般相対性原理に整合する理論であるためには、一般相対論と同様に一般座標変換で不変になるように作用関数を仮定する必要がある。

作用原理については「力と運動の物理」 [6] の第 13 - 15 章

「場と時間空間の物理」 [3] の第 10 - 11 章でマックスウェル場での作用原理について、第 13 - 15 章で重力場での作用原理について扱われている。「現代物理学の論理と方法」 [7] でも第 2 章で扱われている。

最小作用原理を

$$\delta \int \mathcal{L} d\tau = 0 \quad d\tau = dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 \quad (2.2)$$

と表すことにする。ただし \mathcal{L} はラグランジアン

$$I = \frac{\partial(\bar{x}^1 \dots \bar{x}^4)}{\partial(x^1 \dots x^4)}$$
 をヤコビアンとする一般座標変換では

$d\tau$ が $\bar{d}\tau = Id\tau$ と変換するのに対して共変テンソル a_{kl} の行列式 $|a_{kl}|$ は

$$|\bar{a}_{kl}| = |a_{kl}| I^{-2} \quad \text{と変換するので}$$

$$\mathcal{L} = \sqrt{|a_{kl}|} \quad (2.3) \quad \text{が (2.2) を満たすことになる。}$$

ただし $x^1, x^2, x^3, x^4 = x, y, z, ct$

a_{kl} を対称行列 g_{kl} と反対称行列 f_{kl} の部分に分けて

$$a_{kl} = g_{kl} + f_{kl} \quad g_{kl} = g_{lk} \quad f_{kl} = -f_{lk} \quad (2.4) \quad \text{とし}$$

$$\text{ただし } g_{kl} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1) \quad \text{は計量テンソル}$$

f_{kl} は電磁テンソル

ラグランジアン \mathcal{L} を改めて $\sqrt{-|g_{kl} + f_{kl}|}$ と $\sqrt{-|g_{kl}|}$ の線系合成とし

$$\mathcal{L} = \sqrt{-|g_{kl} + f_{kl}|} - \sqrt{-|g_{kl}|} \quad (2.10) \quad \text{とすると}$$

デカルト座標では

$$-|g_{kl} + f_{kl}| = -|\delta_{kl} + f_{kl}| = - \begin{vmatrix} -1 & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & -1 & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & -1 & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 + (f_{23}^2 + f_{31}^2 + f_{12}^2 - f_{14}^2 - f_{24}^2 - f_{34}^2) - (f_{23}f_{14} + f_{31}f_{24} + f_{12}f_{34})^2$$

$$= 1 + (f_{23}^2 + f_{31}^2 + f_{12}^2 - f_{14}^2 - f_{24}^2 - f_{34}^2) - |f_{kl}|$$

となるので

$$L = \sqrt{1 + F - G^2} - 1 \quad (2.11)$$

ただし L はデカルト座標でのラグランジアン

$$F = f_{23}^2 + f_{31}^2 + f_{12}^2 - f_{14}^2 - f_{24}^2 - f_{34}^2 \quad (2.12)$$

$$G = f_{23}f_{14} + f_{31}f_{24} + f_{12}f_{34} \quad (2.13)$$

$$F = \frac{1}{2} f_{kl} f^{kl} \quad G^2 = \frac{|f_{kl}|}{-g} = \frac{(f_{23}f_{14} + f_{31}f_{24} + f_{12}f_{34})^2}{-g} \quad (2.16)$$

以上のようにこの理論では作用積分が一般座標変換で不変になるように設定されていることが確認出来た。

ゲージ変換に対する不変性については次の様に考えることが出来る。

電磁テンソルが $f_{\mu\nu} = \frac{\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu}{\sqrt{\mu_0}}$ と定義されている。 ([3] 場と時間空間の物理

p180) これが一般座標系でもテンソルとしての変換性を持つためには微分 ∂_μ を共

変微分 ∇_μ に変えて ([3] p248) $\partial_\mu A_\nu \rightarrow \nabla_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha A_\alpha$ とする必要があるが

クリストッフェル記号の対称性 $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\nu\mu}^\alpha$ があることと $f_{\mu\nu}$ が反対称テンソルである

ので
$$f_{\mu\nu} = \frac{\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu}{\sqrt{\mu_0}} = \frac{\partial_\mu A_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha A_\alpha - \partial_\nu A_\mu + \Gamma_{\nu\mu}^\alpha A_\alpha}{\sqrt{\mu_0}} = \frac{\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu}{\sqrt{\mu_0}}$$

となって通常の微分に戻る。 これにゲージ変換 $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda$ を行うのだが

A_μ も $\partial_\mu \lambda$ も一般座標系でベクトルとしての変換性を持っている。 ([3] p248)

$f_{\mu\nu}$ にゲージ変換を行うと

$$f_{\mu\nu} = \frac{\partial_\mu (A_\nu + \partial_\nu \lambda) - \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu \lambda)}{\sqrt{\mu_0}} = \frac{\partial_\mu A_\nu + \partial_\mu \partial_\nu \lambda - \partial_\nu A_\mu - \partial_\nu \partial_\mu \lambda}{\sqrt{\mu_0}} = \frac{\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu}{\sqrt{\mu_0}}$$

となってもとに戻り不変となる。 ([3] p262)

これは μ, ν 平面内の2次元ベクトルを $\vec{A} = (A_\mu, A_\nu)$ とすれば

$$f_{\mu\nu} = \frac{\text{rot}(\vec{A} + \text{grad}\lambda)}{\sqrt{\mu_0}} = \frac{\text{rot}(\vec{A})}{\sqrt{\mu_0}}$$

転がゼロになることが含まれていると理解することもできる。

以上から電磁テンソルは一般座標系においてゲージ変換に対して不変である。

計量テンソル g_{kl} はゲージ変換の影響を受けないのでこれもゲージ変換に対しては

不変である。ラグランジアン \mathcal{L} (2.10 式) は電磁テンソルと計量テンソルとから構成されているのでゲージ変換に対して不変性を持っていると言える。

2.3 マックスウェル方程式との一致

ボロン、インフェルト理論がマックスウェル方程式と一致することを確認する。

$$j^{sklm} = \begin{cases} 1,2,3,4 \text{の偶数置換のとき} & \frac{1}{2\sqrt{-g}} \\ 1,2,3,4 \text{の奇数置換のとき} & \frac{-1}{2\sqrt{-g}} \end{cases} \quad (2.17)$$

$$G = \frac{1}{4} f_{sk} f^{*sk} \quad (2.19)$$

$$f^{*sk} = j^{sklm} f_{lm} \quad (2.20)$$

$$j^{lsab} f_{ks} f_{ab} = f^{*ls} f_{ks} = G \delta_k^l \quad (2.25)$$

p_{kl} を反対称テンソルとし

$$\sqrt{-g} p^{kl} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_{kl}} \quad \text{とすると}$$

$$\sqrt{-g} p^{kl} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_{kl}} = \sqrt{-g} \left(2 \frac{\partial L}{\partial F} f^{kl} + \frac{\partial L}{\partial G} f^{*kl} \right) = \frac{(f^{kl} - G f^{*kl}) \sqrt{-g}}{\sqrt{1+F-G^2}} \quad (3.3)$$

デカルト座標上で

$$(x^1, x^2, x^3, x^4) \rightarrow (x, y, z, ct) \quad (5.1)$$

$$(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) \rightarrow (A, \phi) \quad (5.2)$$

$$\left. \begin{aligned} (f_{23}, f_{31}, f_{12}) &\rightarrow B \\ (f_{14}, f_{24}, f_{34}) &\rightarrow E \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

$$\left. \begin{aligned} (p_{23}, p_{31}, p_{12}) &\rightarrow H \\ (p_{14}, p_{24}, p_{34}) &\rightarrow D \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

とし

$$F = \frac{1}{b^2}(B^2 - E^2) \quad (2.12A)$$

$$G = \frac{1}{b^2}(B \cdot E) \quad (2.13A)$$

と F 、 G を再定義する。

ただし従来の単位で表された電界強度を自然単位の電界強度で割った割合を示す定数を b とする。

$$b = \frac{e}{r_0^2} \quad (8.8)$$

$$L = \sqrt{1 + F - G^2} - 1 \quad (2.11) \quad \text{であるので}$$

$$\left. \begin{aligned} H &= b^2 \frac{\partial L}{\partial B} = \frac{B - GE}{\sqrt{1 + F - G^2}} \\ D &= b^2 \frac{\partial L}{\partial E} = \frac{E - GB}{\sqrt{1 + F - G^2}} \end{aligned} \right\} \quad (3.3A)$$

となる。

$$f_{kl} = \frac{\partial \phi_l}{\partial x^k} - \frac{\partial \phi_k}{\partial x^l} \quad (3.1) \quad \text{とすると}$$

$$B = \text{rot } A \quad ; \quad E = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} - \text{grad } \phi \quad (3.1A)$$

$$\text{rot } E + \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \text{div } B = 0 \quad (3.2B)$$

$$\text{rot } H - \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \text{div } D = 0 \quad (3.4A)$$

となってマクスウェル方程式と一致する。

ここで (3.1A) の導出を試みる。

(3.1) (5.1) (5.2) (5.3) より

$$B = (f_{23}, f_{31}, f_{12}) = \left(\frac{\partial \phi_3}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi_2}{\partial x^3}, \frac{\partial \phi_1}{\partial x^3} - \frac{\partial \phi_3}{\partial x^1}, \frac{\partial \phi_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \phi_1}{\partial x^2} \right) = \text{rot } A$$

$$\begin{aligned} E &= (f_{14}, f_{24}, f_{34}) = \left(\frac{\partial \phi_4}{\partial x^1} - \frac{\partial \phi_1}{\partial x^4}, \frac{\partial \phi_4}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi_2}{\partial x^4}, \frac{\partial \phi_4}{\partial x^3} - \frac{\partial \phi_3}{\partial x^4} \right) \\ &= \left(\frac{\partial \phi_4}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial \phi_1}{\partial t}, \frac{\partial \phi_4}{\partial y} - \frac{1}{c} \frac{\partial \phi_2}{\partial t}, \frac{\partial \phi_4}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial \phi_3}{\partial t} \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} - \text{grad } \phi \end{aligned}$$

となって (3.1A) を導出出来た。

ただし、ここでは E, B, H, D は電磁場の空間ベクトルを表し、
 E は電界強度、 B は磁束密度と H は磁場の強度、 D は電束密度。

誘電率は $\frac{1}{\sqrt{1+F-G^2}}$ に比例し、透磁率は $\sqrt{1+F-G^2}$ に比例する。

粒子の半径から十分に離れた領域 ($r \gg r_0$) ではマックスウェル方程式との整合は別の方法でも確認出来る。

$|F-G^2| \ll 1 \quad G^2 \ll |F|$ であるので

$$F = \frac{1}{b^2} (B^2 - E^2) \quad (2.12A)$$

$$L = \sqrt{1+F-G^2} - 1 \quad (2.11) \quad \text{より}$$

$$L \approx \frac{F-G^2}{2\sqrt{1+F-G^2}} \approx \frac{F}{2} = \frac{1}{2b^2} (B^2 - E^2)$$

作用にかかる係数は変分を求める上では任意に選択しても最小作用原理には影響を与えないので

$$L = \frac{-F}{2} = \frac{1}{2b^2} (E^2 - B^2)$$

としてもよく、従来の単位で表された電界強度で表現すれば

$$L = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 E^2 - \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \quad \text{となる。}$$

「場と時間空間の物理」11.4章[3]によれば電荷電流密度が無い場合の電磁場のラグランジュアン密度も

$$L_{em} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 E^2 - \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \quad \text{となることから線系の電磁場の理論と整合}$$

している。

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu}{\sqrt{\mu_0}} \quad \text{と定義されていることから [3]}$$

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu}{\sqrt{\mu_0}}$$

作用関数 $\int L d^4x$ の変分 は

$$\begin{aligned} \delta \int L d^4x &= \delta \int \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) d^4x = -\frac{1}{4} \int (\delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu}) d^4x \\ &= -\frac{1}{2} \int (\delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) d^4x = -\frac{1}{2} \int \delta \left(F_{\mu\nu} \frac{\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu}{\sqrt{\mu_0}} \right) d^4x \\ &= -\frac{1}{2} \int \left(F_{\mu\nu} \frac{\partial^\mu \delta A^\nu - \partial^\nu \delta A^\mu}{\sqrt{\mu_0}} \right) d^4x \\ &= -\frac{1}{2} \int \left(\partial^\mu F_{\mu\nu} \frac{\delta A^\nu}{\sqrt{\mu_0}} + \partial^\nu F_{\mu\nu} \frac{-\delta A^\mu}{\sqrt{\mu_0}} \right) d^4x - \frac{1}{2} \int \left[F_{\mu\nu} \frac{\delta A^\nu}{\sqrt{\mu_0}} \right]_{x^\mu=-\infty}^{\infty} d^3x - \frac{1}{2} \int \left[F_{\mu\nu} \frac{-\delta A^\mu}{\sqrt{\mu_0}} \right]_{x^\nu=-\infty}^{\infty} d^3x \\ &= -\frac{1}{2} \int \left(\partial^\mu F_{\mu\nu} \frac{\delta A^\nu}{\sqrt{\mu_0}} \right) d^4x - \frac{1}{2} \int \left(\left[F_{\mu\nu} \frac{\delta A^\nu}{\sqrt{\mu_0}} \right]_{x^\mu=-\infty}^{\infty} \right) d^3x \\ &= -\int \left(\partial^\mu F_{\mu\nu} \frac{\delta A^\nu}{\sqrt{\mu_0}} \right) d^4x \end{aligned}$$

ただし δA_ν が無現遠方で消えることと微分と変分が交換可能なことを利用している。

[8]

最小作用原理 $\delta \int L d^4x = 0$ より

$$-\int \left(\partial^\mu F_{\mu\nu} \frac{\delta A^\nu}{\sqrt{\mu_0}} \right) d^4x = 0$$

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0$$

$\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ とし

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{\varepsilon_0}E_1 & -\sqrt{\varepsilon_0}E_2 & -\sqrt{\varepsilon_0}E_3 \\ \sqrt{\varepsilon_0}E_1 & 0 & \frac{-B_3}{\sqrt{\mu_0}} & \frac{B_2}{\sqrt{\mu_0}} \\ \sqrt{\varepsilon_0}E_2 & \frac{B_3}{\sqrt{\mu_0}} & 0 & \frac{-B_1}{\sqrt{\mu_0}} \\ \sqrt{\varepsilon_0}E_3 & \frac{-B_2}{\sqrt{\mu_0}} & \frac{B_1}{\sqrt{\mu_0}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\partial^1 \sqrt{\varepsilon_0}E_1 + \partial^2 \sqrt{\varepsilon_0}E_2 + \partial^3 \sqrt{\varepsilon_0}E_3 = 0$$

$$-\partial^0 \sqrt{\varepsilon_0}E_1 + \partial^2 \frac{B_3}{\sqrt{\mu_0}} + \partial^3 \frac{-B_2}{\sqrt{\mu_0}} = 0$$

$$-\partial^0 \sqrt{\varepsilon_0}E_2 + \partial^1 \frac{-B_3}{\sqrt{\mu_0}} + \partial^3 \frac{B_1}{\sqrt{\mu_0}} = 0$$

$$-\partial^0 \sqrt{\varepsilon_0}E_3 + \partial^1 \frac{B_2}{\sqrt{\mu_0}} + \partial^2 \frac{-B_1}{\sqrt{\mu_0}} = 0$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \text{ から}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathbf{B}$$

となって粒子の半径から十分に離れた領域 ($r \gg r_0$) で電荷や電流がない場合のマックスウェル方程式の半分と一致した。残りの半分は以下のようになる。

双対電磁場テンソル $\tilde{F}_{\mu\nu}$ を

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \text{ とする}$$

ただし $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ は 4 次元レビ・チビタ記号で $\varepsilon^{1230} = 1$ で隣り合う添え字の交換で反対符号になり、それ以外は 0 になる。

たとえば $\mu=1 \quad \nu=2$ のとき

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \tilde{F}_{12} = \frac{1}{2}\varepsilon^{12\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{1230}F_{30} + \frac{1}{2}\varepsilon^{1203}F_{03} = \frac{1}{2}F_{30} - \frac{1}{2}F_{03} = F_{30}$$

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{B_1}{\sqrt{\mu_0}} & \frac{B_2}{\sqrt{\mu_0}} & \frac{B_3}{\sqrt{\mu_0}} \\ \frac{-B_1}{\sqrt{\mu_0}} & 0 & \sqrt{\varepsilon_0}E_3 & -\sqrt{\varepsilon_0}E_2 \\ \frac{-B_2}{\sqrt{\mu_0}} & -\sqrt{\varepsilon_0}E_3 & 0 & \sqrt{\varepsilon_0}E_1 \\ \frac{-B_3}{\sqrt{\mu_0}} & \sqrt{\varepsilon_0}E_2 & -\sqrt{\varepsilon_0}E_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\tilde{F}_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu}$ は電場と磁場を交換する $\left(\frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\mu_0}}, \sqrt{\varepsilon_0}\mathbf{E}\right) \rightarrow \left(\sqrt{\varepsilon_0}\mathbf{E}, -\frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\mu_0}}\right)$ とみなせる。

$$\begin{aligned} \partial_\nu \tilde{F}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\mu_0}}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\mu_0}}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu\partial_\alpha A_\beta = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\nu\partial_\alpha - \partial_\alpha\partial_\nu)A_\beta = 0 \end{aligned}$$

であるので

$$\partial^1\sqrt{\varepsilon_0}\frac{-B_1}{\sqrt{\mu_0}} + \partial^2\frac{-B_2}{\sqrt{\mu_0}} + \partial^3\frac{-B_3}{\sqrt{\mu_0}} = 0$$

$$\partial^0\frac{B_1}{\sqrt{\mu_0}} - \partial^2\sqrt{\varepsilon_0}E_3 + \partial^3\sqrt{\varepsilon_0}E_2 = 0$$

$$\partial^0\frac{B_2}{\sqrt{\mu_0}} + \partial^1\sqrt{\varepsilon_0}E_3 - \partial^3\sqrt{\varepsilon_0}E_1 = 0$$

$$\partial^0\frac{B_3}{\sqrt{\mu_0}} - \partial^1\sqrt{\varepsilon_0}E_2 + \partial^2\sqrt{\varepsilon_0}E_1 = 0$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \text{ から}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \mathbf{E}$$

となって残りの半分についても粒子の半径から十分に離れた領域 ($r \gg r_0$) で電荷や電流がない場合のマックスウェル方程式の半分と一致した。
以上のようにボルン、インフェルト理論はマックスウェル方程式と一致することが確認出来た。

2.4 エネルギー運動量テンソルの導出

一般座標系における作用積分の変分 $\delta_g S_{em}$ と電磁場エネルギー運動量テンソル

$T_{\mu\nu}^{em}(x)$ との関係は

$$\delta_g S_{em} = -\frac{1}{2c} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}(x) T_{\mu\nu}^{em}(x) \quad (14.56)$$

となる。(「場と時間空間の物理 14.4 章」 [3])

これをポルン-インフェルト理論の表記に置き換えると $c=1$ として

T_{kl} をエネルギー運動量テンソルとすると

$$\delta \mathcal{L} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} \delta g^{kl} T_{kl} \quad \text{となるので}$$

$$T_{kl} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{kl}} \quad \text{となる。}$$

$$\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{kl}} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{kl} \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial g^{kl}} = g^{sr} f_{ks} f_{lr} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial G}{\partial g^{kl}} = \frac{1}{2} G g_{kl} \quad (4.3)$$

であるので

$$\begin{aligned} -2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{kl}} &= \sqrt{-g} \left\{ \mathbf{L} g_{kl} - 2 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial g^{kl}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial G} \frac{\partial G}{\partial g^{kl}} \right) \right\} \\ &= \sqrt{-g} \left\{ \mathbf{L} g_{kl} - \frac{f_{ks} f_{lr} g^{sr} - G^2 g_{kl}}{\sqrt{1+F-G^2}} \right\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

これに (2.25) (3.3) より

$$-2 \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{kl}} = \sqrt{-g} T_{kl} = \sqrt{-g} (\mathbf{L}g_{kl} - f_{ks} p_{lr} g^{sr}) \quad (4.5) \quad \text{となる。}$$

ここで (4.5) 式について原文では導出過程が示されていないのでその導出を試みる。

エネルギー運動量テンソル T_{kl} の定義 $T_{kl} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{kl}}$ と (4.4), (2.25), (3.3) より

$$\begin{aligned} T_{kl} &= \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{kl}} = Lg_{kl} - \frac{f_{ks} f_{lr} g^{sr} - G^2 g_{kl}}{\sqrt{1+F-G^2}} = Lg_{kl} - \frac{f_{ks} f_{lr} g^{sr} - G^2 \delta_k^m g_{lm}}{\sqrt{1+F-G^2}} \\ &= Lg_{kl} - \frac{f_{ks} f_{lr} g^{sr} - G f_{ks} f^{*ms} g_{lm}}{\sqrt{1+F-G^2}} = Lg_{kl} - \frac{f_{ks} f_{lr} g^{sr} - G f_{ks} f_{*l}^s}{\sqrt{1+F-G^2}} \\ &= Lg_{kl} - \frac{f_{ks} f_{lr} g^{sr} - G f_{ks} f_{*lr} g^{sr}}{\sqrt{1+F-G^2}} = Lg_{kl} - f_{ks} p_{lr} g^{sr} \end{aligned}$$

従って

$$-2 \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{kl}} = \sqrt{-g} T_{kl} = \sqrt{-g} (\mathbf{L}g_{kl} - f_{ks} p_{lr} g^{sr}) \quad \text{となって (4.5) が導出出来た。}$$

U をエネルギー密度とし

$$\frac{T^{kl}}{4\pi} = \begin{bmatrix} X_x & X_y & X_z & cG_x \\ Y_x & Y_y & Y_z & cG_y \\ Z_x & Z_y & Z_z & cG_z \\ \frac{1}{c} S_x & \frac{1}{c} S_y & \frac{1}{c} S_z & U \end{bmatrix} \quad (3.6A)$$

とするとデカルト座標では (2.11) (3.6) (3.3) より

$$4\pi U = D_x E_x + D_y E_y + D_z E_z + b^2 \mathbf{L} \quad (3.6B)$$

となると原文にはあるが b^2 が \mathbf{L} にかかっていることから、ここでは (4.5) は

$$-2b^2 \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{kl}} = \sqrt{-g} T^{kl} = b^2 \sqrt{-g} (\mathbf{L}g_{kl} - f_{ks} p_{lr} g^{sr}) \quad (4.5) \text{に変更されていると推測する。}$$

以上のように作用関数からエネルギー運動量テンソルが導出されることが確認できた。

2.5 場の方程式の静的解

$B = H = 0$ で、他のすべての場の成分は t とは独立しているような静電場の場合をデカルト座標系で考察する。そして、場の方程式は次のように簡略化される。

$$\text{rot } E = 0 \quad (6.1)$$

$$\text{div } D = 0 \quad (6.2)$$

中心対称の場合のこの方程式を解く。(6.2) は単純に

$$\frac{d}{dr}(r^2 D_r) = 0 \quad (6.3)$$

(6.3) は解

$$D_r = e / r^2 \quad (6.4)$$

を有する。

この場合、 D 場はマクスウェルの理論とまったく同じとなる。

D の源は表面積分によって与えられる点電荷となる。

$$4\pi e = \int D_r d\sigma \quad (6.5)$$

方程式 (6.1) は

$$E_r = -\frac{d\phi}{dr} = -\phi'(r) \quad (6.6)$$

を与える。(3.3A) から

$$D_r = \frac{E_r}{\sqrt{1 - \frac{1}{b^2} E_r^2}} = -\frac{\phi'(r)}{\sqrt{1 - \frac{1}{b^2} \phi'^2}} \quad (6.7)$$

(6.4) と (6.7) を組み合わせると、1 次の微分方程式が得られる。

$$\phi(r) = \frac{e}{r_0} f\left(\frac{r}{r_0}\right) ; \quad f(x) = \int_x^\infty \frac{dy}{\sqrt{1+y^4}} \quad ; \quad r_0 = \sqrt{\frac{e}{b}} \quad (6.8)$$

$\phi(r)$ は、点電荷 e の基本的なポテンシャルであり、 $x \gg 1$ のときクーロンの法則に近似的に置き換わる。このポテンシャルはどこでも有限である。

置換 $x = \tan \frac{1}{2} \beta$ として

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_{\beta(x)}^{\infty} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \beta}} = f(0) - \frac{1}{2} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \bar{\beta}\right) \quad (6.9)$$

$$\text{ただし } \bar{\beta} = 2 \arctan x \quad (6.10)$$

$F(k, \bar{\beta})$ は第一種ヤコビアン楕円積分である。

$$F(k, \bar{\beta}) = \int_0^{\bar{\beta}(x)} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \frac{1}{4} \pi \text{ のとき}$$

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \bar{\beta}\right) = \int_0^{\bar{\beta}(x)} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \beta}} \quad (6.11)$$

現在では $F(k, \bar{\beta})$ は第一種楕円積分のルジャンドルの標準形と呼ばれることが多い。

$x = 0$ の場合

ポテンシャルは中心に最大値を持ち、その値は

$$f(0) = F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \pi\right) = 1.8541 \quad (6.12)$$

である。

$$\phi(0) = 1.8541 \frac{e}{r_0} \quad (6.13)$$

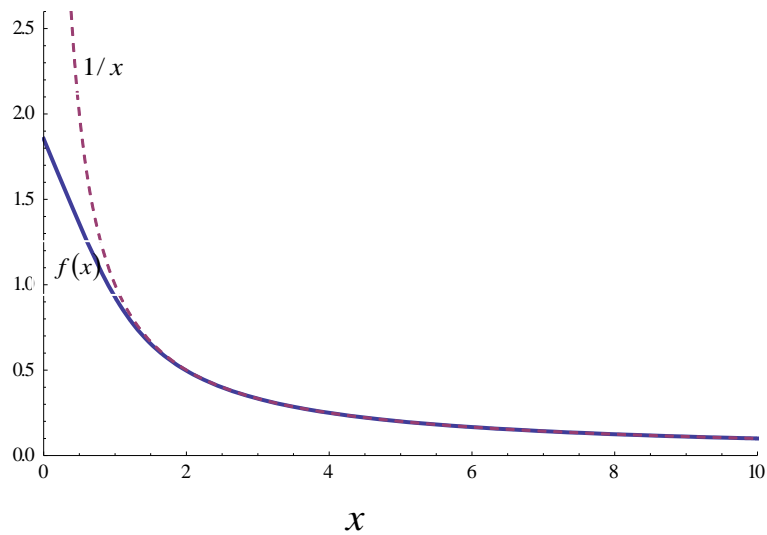


図 2-1 $f(x)$

関数 $f(x)$ を図 2-1 に示す。これは、関数 $\text{arc cot } x$ と非常によく似た性質を持っている。たとえば、

$$\bar{\beta}(1/x) = 2 \text{arc tan } 1/x = 2 \left(\frac{1}{2} \pi - \text{arc tan } x \right) = \pi - \bar{\beta}(x)$$

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \bar{\beta}\right) + F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pi - \bar{\beta}\right) = F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pi\right)$$

$$\text{したがって、} f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = f(0) \quad (6.14)$$

となる。したがって、 $x=0$ から $x=1$ または $\beta=0$ から $\beta=\frac{1}{4}\pi$ まで $f(x)$ を計算すれば十分である。D 場は $r=0$ に対して無限大であることが分かる。しかし、 E と ϕ は常に有限である。これは

$$D_r = e/r^2 \quad (6.4)$$

$$E_r = \frac{e}{r_0^2 \sqrt{1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^4}} \quad (6.15)$$

成分 E_x, E_y, E_z は中央で有限であるが、不連続性を持つ。

以上のように場の方程式の静的解が得られた。

2.6 エネルギーが有限になるメカニズム

前章で求めた静的解は

$$E_r = \frac{e}{r_0^2 \sqrt{1+(r/r_0)^4}} \quad (6.15)$$

ただし e は電荷量、 E_r は電界強度の半径方向成分、 r_0 は電荷の広がりを示す半径

$$r_0 = \sqrt{\frac{e}{b}} \quad (6.8)$$

2.4章で求めたエネルギー密度 U は

$$4\pi U = b^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-1/b^2 E^2}} - 1 \right) \quad (3.6C)$$

これを中心から外に向かって積分することで全エネルギー E が得られ

$$E = \int_0^\infty U dv = \int_0^\infty U 4\pi r^2 dr = 1.2361 \frac{e^2}{r_0} \quad (8.5) \quad (8.6)$$

となってエネルギーが有限になり前述の困難が解決する。

放送大学の学生として購入した Mathematica 学生版を使用して (8.6) と結果が一致することを確認した。

```

Integrate[(1/r0^3) * (1/Sqrt[1 - (1/(1 + (r/r0)^4))] - 1) * r^2, {r, 0, Infinity}]
ConditionalExpression[-(1/r0^4)^(3/4) r0 sqrt[r0^4] Gamma[-3/4] Gamma[5/4], Re[r0^4] > 0]

N[ConditionalExpression[-(1/r0^4)^(3/4) r0 sqrt[r0^4] Gamma[-3/4] Gamma[5/4], Re[r0^4] > 0]]
ConditionalExpression[1.23605 (1/r0^4)^(3/4) r0 sqrt[r0^4], Re[r0^4] > 0.]

```

図 2-2 Mathematica による式 (8.6) の確認

(6.15)より r/r_0 に対する $\frac{r_0^2}{e} E_r$ を作図した。

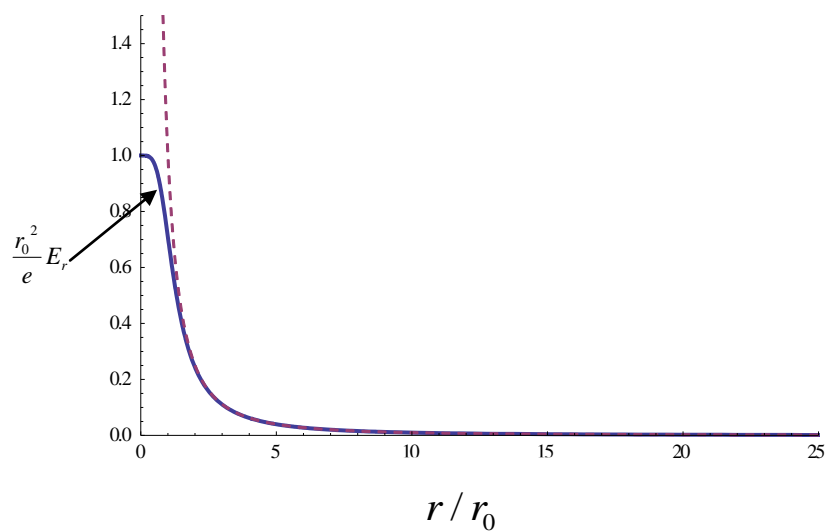


図 2-3 $\frac{r_0^2}{e} E_r$

電場 E_r は $r=0$ の中心にて有限だが最大となり周辺に向かって減衰する。
点線は線系の場合を示し中心で無限大になる。

(6.15) (6.8) (3.6c) (8.6) より $\frac{r_0}{e^2} \int_0^r U dv$ を作図した。

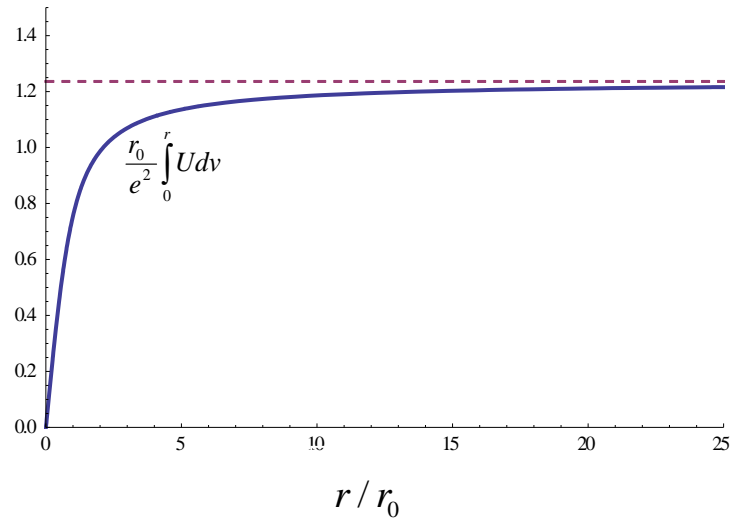


図 2-4 $\frac{r_0}{e^2} \int_0^r U dv$

エネルギー $\int_0^r U dv$ は $r \rightarrow \infty$ にて (8.6) より求めた点線に収束することから有限である

ことが分かる。

以上のことからエネルギーが有限になるメカニズムが分かった。

2.7 電荷密度の定義とその性質

電荷密度を ρ とし $\rho = \text{div}D$ という一般的な定義を適応するとボルン-インフェルト理論においても点電荷となり中心に特異点が現れる。

これをさけるためにボルン-インフェルト理論では $\rho = \text{div}E$ を採用している。

球対象の解では

$$D_r = e/r^2 \quad (6.4)$$

$$E_r = \frac{e}{r_0^2 \sqrt{1+(r/r_0)^4}} \quad (6.15)$$

となり、 D_r は中心で不連続であり無限大となり特異点である。

E は中心で不連続であるが有限であり積分にも寄与しないので特異点ではない。無限遠にてどちらも $D_r = E_r = e/r^2$ となるので

$$\int \text{div}D dv = \oint D_r ds = 4\pi r^2 \frac{e}{r^2} = 4\pi e$$

$$\int \text{div}E dv = \oint E_r ds = 4\pi r^2 \frac{e}{r^2} = 4\pi e$$

となつてどちらの定義でも電荷の総量は $4\pi e$ となる。

r が有限の場合は

ここでは $\text{div}E = 4\pi\rho$ と定義しなおして

$$\rho = \frac{e}{2\pi_0^3 \frac{r}{r_0} \left(1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^4\right)^{3/2}} \quad (7.12)$$

となる。その導出は極座標上の発散の定義より

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \text{div}E = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{e}{r_0^2 \sqrt{1+(r/r_0)^4}} \right) = \frac{e}{2\pi_0^3 \frac{r}{r_0} \left(1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^4\right)^{3/2}}$$

となつて導出出来た。

図 2-5 に $\frac{\rho}{e}$ を示す。電荷密度は中心で無限大、無限遠でゼロになっている。

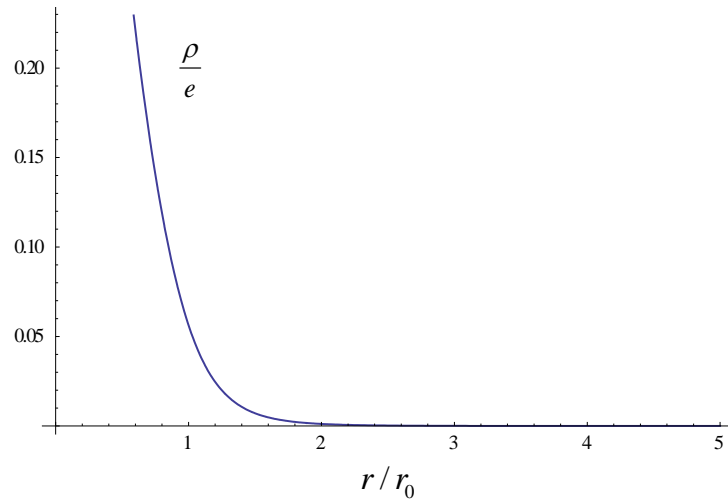


図 2-5 $\frac{\rho}{e}$

以上のようにこの理論では電荷密度には2種類の定義があり、一方は特異点を持ちもう一方は特異点を持たないという性質があるが電荷の総量は同じであることが分かった。

2.8 粒子の運動方程式の導出

外部場が作用している基本電荷の動きは、ローレンツの古典的方程式を満たす。このことを検証する。

P 、 Q を

$$\frac{1}{2} p^{*kl} p^{*kl} = P \quad (4.6)$$

$$\frac{1}{4} p^{kl} p^{*kl} = Q \quad (4.7)$$

とする。(3.3) (2.12) (2.13) (2.17) より

$$P = \frac{-F + G^2 F + 4G^2}{1 + F - G^2} \quad (4.8)$$

$$Q = G \quad (4.9)$$

(4.8) (4.9)は、より対称的な形で書くことができる

$$\frac{1 + F - G^2}{1 + G^2} = \frac{1 + Q^2}{1 + P - Q^2} \quad (4.8A)$$

$$G = Q \quad (4.9A)$$

(3.3) と (2.26) から、

$$p^{*kl} = \frac{f^{*kl} + G f^{kl}}{\sqrt{1 + F - G^2}} \quad (3.3A)$$

(4.8A) と (4.9A) を考慮して (3.3) と (3.3A) を解く

$$f^{kl} = \frac{p^{kl} + Q p^{*kl}}{\sqrt{1 + P - Q^2}} \quad f^{*kl} = \frac{p^{*kl} + Q p^{kl}}{\sqrt{1 + P - Q^2}} \quad (4.10)$$

ラグランジアン L の代わりに作用原理としてハミルトニアン H を

$$H = L - \frac{1}{2} p^{kl} f_{kl} \quad (4.11)$$

とする。

ただしこのハミルトニアンは通常ハミルトン形式とは違って当時、「相対論的なハミルトン形式」として盛んに使われていた手法であり、現在のようにエネルギー密度を示すものではない。

時空座標の全てを通常の解析力学の時間変数であるかのように扱う形式で書かれている。つまり、時間だけでなく、空間座標に関しても「一般化運動量」を定義していてそれが p^{kl} である。

ここでHは g^{kl} と p_{kl} の関数とみなされる必要がある。(4.8)、(4.9)、(4.10) から、Hは g^{kl} と p_{kl} の関数として次のようになる。

$$\mathcal{H} = H\sqrt{-g} = \sqrt{-g}(\sqrt{1+P-Q^2} - 1) \quad (4.12)$$

これは以下の形式で表すことができる。

$$\mathcal{H} = \sqrt{-|g_{kl} + p_{kl}^*|} - \sqrt{-|g_{kl}|} \quad (4.12A)$$

ここで(4.12A)について導出を試みる。

(4.12) (4.6) より

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sqrt{-g} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{2} p^{*kl} p^{*kl} - \frac{1}{16} (p^{kl} p^{*kl})^2} - 1 \right) \\ &= \sqrt{-g} \left(\sqrt{1 + (p_{23}^{*2} + p_{31}^{*2} + p_{12}^{*2} - p_{14}^{*2} - p_{24}^{*2} - p_{34}^{*2}) + (p_{23}^* p_{14}^* + p_{31}^* p_{24}^* + p_{12}^* p_{34}^*)^2} - 1 \right) \\ &= \sqrt{-|g_{kl} + p_{kl}^*|} - \sqrt{-|g_{kl}|} \quad (4.12A) \end{aligned}$$

となって(4.12A)が導出できた。

関数Hは、関数Lとまったく同じ場の方程式になっている。

$$p_{kl}^* = \frac{\partial \psi_{*l}}{\partial x^k} - \frac{\partial \psi_{*k}}{\partial x^l} \quad (4.13)$$

ただし ψ_{*k} は反ポテンシャルベクトル

$$\sqrt{-g} f^{*kl} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{kl}^*} \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial \sqrt{-g} f^{*kl}}{\partial x^l} = 0 \quad (4.15)$$

電子を囲む領域における外部電界の強さが、点電荷の本来の電界と比較して非常に小さいと仮定する。

電子の本来の場を $p_{kl}^{(0)}, f_{kl}^{(0)}$ (8, 9)

外部場を $p_{kl}^{(e)}, f_{kl}^{(e)}$ (8, 10)

外部場の発生源を考慮に入れない。その前提から

$$p_{kl}^{(0)} \gg f_{kl}^{(e)} \quad f_{kl}^{(0)} \gg f_{kl}^{(e)} \quad (8, 11)$$

場の方程式の実際の解は、摂動のない本来の場と外部場を加えることによって得られるものと大きく異なることはない。

したがって、球の内部で (8. 11) が常に満たされるように半径 r_0 が非常に小さい球面 $S^{(0)}$ を構築する。

しかし球体の半径 r_0 は電子の半径に比べて大きいとし、球体の表面上のマクスウェル方程式の有効性は球体の外と同じであると仮定する。

我々は、加速度（世界線の曲率）があまり大きくない、すなわち、 $S^{(0)}$ 内の $p_{kl}^{(0)}$ 場が電荷の等速運動の場と本質的に同じであるように半径を選択できるように ローレンツ変換によって 7 章の式から導き出すことができる。

今度は、

$$\int \mathbf{H} d\tau \quad (8, 12)$$

の積分を球面 $S^{(0)}$ と $S^{(0)}$ 内の残りの空間 R に分割し、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H} &= \sqrt{1 - \frac{1}{2} p_{kl} p^{kl}} - 1 \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{2} p_{kl}^{(0)} p^{(0)kl} - p_{kl}^{(0)} f^{(e)kl} - \frac{1}{2} f_{kl}^{(e)} p^{(e)kl}} - 1 \\ \mathbf{Q} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8, 13)$$

(8. 11) に対応して、 $f_{kl}^{(0)} f^{(0)kl}$ と比較して $f_{kl}^{(0)} f^{(e)kl}$ を 1 次の小さな数とみなすこ

とができ、 $f_{kl}^{(e)} f^{(e)kl}$ は 2 次の小さな数であり、後者は無視される。

次に、(8.13) と (4.14) を使用して

$$\mathbf{H} = \sqrt{1 - \frac{1}{2} p_{kl}^{(0)} p^{(0)kl}} - 1 - \frac{1}{2} f_{kl}^{(0)} f^{(e)kl} \quad (8.14)$$

これは球 $S^{(0)}$ の内部に保持されている。別の形では

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{H}^{(0)} - \frac{1}{2} f_{kl}^{(0)} f^{(e)kl} - \frac{1}{4} f_{kl}^{(e)} f^{(e)kl} \\ \mathbf{H}^{(0)} &= \sqrt{1 - \frac{1}{2} p_{kl}^{(0)} p^{(0)kl}} - 1 \end{aligned} \right\} \quad (8.15)$$

と書くことができる。

(8.15) は (8.14) と 2 次項の点でのみ異なる。しかし、(8.15) は、球体の内側だけでなく球体の外側にも保持される。R については、式 (8.15) は、 r_0 についての仮定に従って、次の形式を取る。

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= -\frac{1}{4} p_{kl}^{(0)} p^{(0)kl} - \frac{1}{2} f_{kl}^{(0)} f^{(e)kl} - \frac{1}{4} f_{kl}^{(e)} f^{(e)kl} \\ &= -\frac{1}{4} f_{kl}^{(0)} f^{(0)kl} - \frac{1}{2} f_{kl}^{(e)} f^{(0)kl} - \frac{1}{4} f_{kl}^{(e)} f^{(e)kl} \end{aligned} \quad (8.16)$$

しかし、これはマクスウェルの理論における H の既知の式である。 ($\mathbf{L} = -\mathbf{H}$)。

ここで ($\mathbf{L} = -\mathbf{H}$) の導出を試みる。

(2.12), (2.13), (4.8A), (4.9A), (4.12), (4.12A) より

$$r \gg r_0 \text{ にて } |F|, G \ll 0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \sqrt{1 + P - Q^2} - 1 = \sqrt{\frac{(1+G^2)(1-Q^2)}{1+F-G^2}} - 1 \cong \sqrt{\frac{1}{1+F-G^2}} - 1 \\ &\cong \left(1 + \frac{\partial \sqrt{\frac{1}{1+F-G^2}}}{\partial (F-G^2)} (F-G^2) \right) - 1 = \left(-\frac{1}{2} (1+F-G^2)^{-\frac{3}{2}} \right) (F-G^2) \\ &\cong -\left(\frac{1}{2} (1+F-G^2)^{-\frac{3}{2}} \right) (F-G^2) \end{aligned}$$

$$\cong -(\sqrt{1+F-G^2}-1) = -L$$

となって ($L = -H$) が導出できた。

R 内の球面 $S^{(0)}$ にも (8.15) が成立する。

$$\int H d\tau = \int H^{(0)} d\tau - \frac{1}{2} \int f_{kl}^{(0)} f^{(e)kl} d\tau - \frac{1}{4} \int f_{kl}^{(e)} f^{(e)kl} d\tau \quad (8.17)$$

表現を変えて

$$4\pi\Lambda = \int H^{(0)} dv - \frac{1}{2} \int f_{kl}^{(0)} f^{(e)kl} dv - \frac{1}{4} \int f_{kl}^{(e)} f^{(e)kl} dv \quad (8.18)$$

作用原理から

$$\delta \int \Lambda dt = 0 \quad (8.19)$$

(8.17) の積分値

$$\int f_{kl}^{(e)} f^{(e)kl} d\tau \quad (8.20)$$

は“0” なぜなら

$$\frac{\partial f^{(e)kl}}{\partial x^l} = 0 \quad (\rho_k^{(e)} = 0) \quad (8.21)$$

静止した $\int H^{(0)} dv$ の点電荷が質量に比例している座標系であることから、

$$\int H^{(0)} dv = m_0 c^2 \int \sqrt{1-v^2/c^2} dv \quad (8.22)$$

ここで、 v は電子の中心の速度である。

(8.17) の 2 番目の積分は $f_{kl}^{(e)} = \frac{\partial \phi_l^{(e)}}{\partial x^k} - \frac{\partial \phi_k^{(e)}}{\partial x^l}$ と部分積分によって、 $\frac{\partial f^{(0)kl}}{\partial x^l} = 4\pi\rho^k$ を

$$\text{使用して } \frac{1}{2} \int f^{(0)kl} f_{kl}^{(e)} dv dt = -4\pi \int \phi_l^{(e)} \rho^l dv dt \quad (8.24)$$

となると原文にあるが、この (8.24) について導出を試みる。

$$\frac{\partial f^{(0)kl}}{\partial x^l} = 4\pi\rho^k, \quad f_{kl}^{(e)} = \frac{\partial \phi_l^{(e)}}{\partial x^k} - \frac{\partial \phi_k^{(e)}}{\partial x^l}, \quad f^{(0)kl} = -f^{(0)lk} \text{ より}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int f^{(0)kl} f_{kl}^{(e)} dv dt &= \frac{1}{2} \int f^{(0)kl} \left(\frac{\partial \varphi_l^{(e)}}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi_k^{(e)}}{\partial x^l} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \int \frac{\partial f^{(0)kl}}{\partial x^k} (\varphi_l^{(e)}) + \frac{1}{2} \frac{\partial \int f^{(0)kl} \varphi_l^{(e)}}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \int \frac{\partial f^{(0)kl}}{\partial x^l} (-\varphi_k^{(e)}) + \frac{1}{2} \frac{\partial \int -f^{(0)kl} \varphi_k^{(e)}}{\partial x^l} \\
&= -\frac{1}{2} \int \frac{\partial f^{(0)kl}}{\partial x^k} (\varphi_l^{(e)}) - \frac{1}{2} \int \frac{\partial f^{(0)kl}}{\partial x^l} (-\varphi_k^{(e)}) = -\int \frac{\partial f^{(0)kl}}{\partial x^k} (\varphi_l^{(e)}) \\
&= -\int 4\pi \rho^l (\varphi_l^{(e)}) = -4\pi \int \varphi_l^{(e)} \rho^l dv dt \quad (8.24) \quad \text{となって導出出来た。}
\end{aligned}$$

無限大表面上の追加の面積分は、バリエーション (8.19) に寄与しないため、省略することができる。結果は

$$\Lambda = m_0 c^2 \int \sqrt{1 - v^2 / c^2} - \int \phi_l^{(e)} \rho^l dv \quad (8.25)$$

次のとおり空間ベクトル形式で

$$\Lambda = m_0 c^2 \int \sqrt{1 - v^2 / c^2} - \int \phi^{(e)} \rho dv + \frac{1}{c} \int A I dv \quad (8.25A)$$

と書くことができる。

したがって、電子は、外部場 $f_{kl}^{(e)}$ によって作用する静止質量 m_0 を有する機械系のように挙動する。

外側のポテンシャルが、電子を取り囲む領域において本質的に一定であると考えられるとき、直径が r_0 に比べて大きい場合、(8.25) の代わりに以下が得られる。

$$\int \Lambda dt = \int \left(m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2 / c^2} + e \left(\phi^{(e)} - v A^{(e)} / c \right) \right) dt \quad (8.26)$$

ただし () dt は私が推測して加えた。

(8.26) はローレンツの運動方程式 [3] (11.2 章) と全く同じであることから、ボルン-インフェルト理論において外部場が作用している基本電荷の動きは、ローレンツの古典的運動方程式を満たすことが検証できた。

以上の様に粒子の運動方程式が導出され、古典的運動方程式と一致することが確認できた。

2.9 波長の減少に伴う実効電荷の減少

$\Lambda = m_0 c^2 \int \sqrt{1 - v^2/c^2} - \int \phi_l^{(e)} \rho' dv$ (8.25) は一定ではない場についても有効になっている。どの場もフーリエ成分または基本波で分割できる。

それらを別々に考えることができ、波の伝播に平行な Z 軸を選択すると、外部場振幅 $\phi_s^{(e)}$ は $e^{2\pi iz/\lambda}$ に比例すると仮定できる。

このフーリエ成分が積分 (8.25) に寄与している。

電荷 e は有効な以下の電荷 \bar{e} に置き換わる

$$\bar{e} = \int \rho e^{2\pi iz/\lambda} dv$$

(7.12) で与えられた式と $z = r \cos \theta$ を用いて、

$$dv = r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr$$

$$\bar{e} = \frac{e}{r_0^3} \int_0^\infty \int_0^\pi \frac{r^2}{\frac{r}{r_0} \left(1 + \left(\frac{r}{r_0} \right)^4 \right)^{3/2}} e^{\frac{2\pi i r}{\lambda} \cos \theta} \sin \theta d\theta$$

θ の積分を実行することができ

$$\bar{e} = e g \left(\frac{2\pi r_0}{\lambda} \right) \quad g(x) = \frac{2}{x} \int_0^\infty \frac{\sin y}{(1+y^4)^{3/2}} dy$$

と書ける

r_0 と比較して長い波については、 $g(0)=1$ であるため、 $\bar{e}=e$ となる。しかし、

r_0 と比較して短い波については、波長の減少が実効電荷を減少させる

この減少は $x \approx 1$ または $\lambda \approx 2\pi r_0$ で顕著になり始める。

図 2-6 に $g(x)$ と $2/x^2$ の対比を示す。

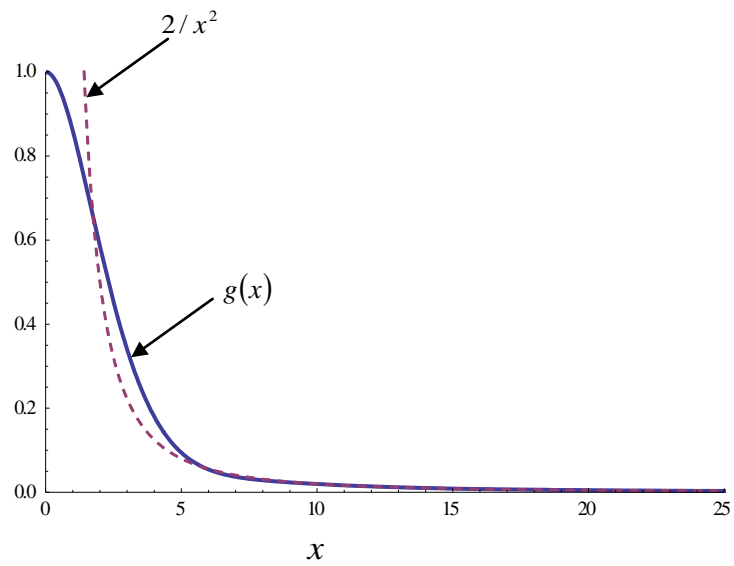


図 2-6 $g(x)$ と $2/x^2$ の対比

x が大きいときは $g(x) \approx 2/x^2$ (破線) となる。

以上のように短い波長を持つ電磁波に対しては実効電荷が減少することが分かった。

2.10 現在におけるボルン-インフェルト理論への評価

ボルン-インフェルト理論は量子論への移行が成功していないが非線形電磁気学の代表例であり偏微分方程式による平面波解 [4] やパルス・ソリトン解 [5] が研究されている。

1985 年には「NON-LINEAR ELECTRODYNAMICS FROM QUANTIZED STRINGS」[2] という論文が E. S. FRADKIN と A. A. TSEYTLIN という二人の人物によってモスクワの P. N. Lebedev Physical Institute に提出されている。

ボルン-インフェルト理論を超弦理論に使った最初の論文の一つであり研究者の間では FT 理論と呼ばれている。

Non-linear electrodynamics from quantized strings

E. S. Fradkin and A. A. Tseytlin

P. N. Lebedev Physical Institute,
Leninsky pr. 53, Moscow 117924 USSR

ABSTRACT

We compute the effective action for an abelian vector field coupled to the virtual open Bose string. The problem is exactly solved (in the "tree" and "one-loop" approximation for the string theory) for the case of a constant field strength and the number of space-time dimensions $D = 26$. The resulting tree-level effective lagrangian is shown to coincide with the Born-Infeld lagrangian, $\sqrt{\det(\delta_{\mu\nu} + 2\pi\alpha' F_{\mu\nu})}$

図 2-7 ON-LINEAR ELECTRODYNAMICS FROM QUANTIZED STRINGS の冒頭
(CERN LIBRARIES, GENEVA)

現在、ボルン-インフェルト理論は超弦理論のなかで有効理論として盛んに議論されている。

第3章 Born Infeld Equation

3.1 偏微分方程式による平面波解

ボルン-インフェルト理論から偏微分方程式により平面波解を求める試みもある。

BORN-INFELD EQUATIONS Alexander A. Chernitskii [4]

$$f_{kl} = \frac{\partial \phi_l}{\partial x^k} - \frac{\partial \phi_k}{\partial x^l} \quad (1)$$

$$(x^1, x^2, x^3, x^4) \rightarrow (x, y, z, ct) \quad (2)$$

$$(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) \rightarrow (A, \phi) \quad (3)$$

ここで ϕ はスカラーポテンシャル

$$\left. \begin{array}{l} (f_{23}, f_{31}, f_{12} \rightarrow B \\ , f_{14}, f_{24}, f_{34}) \rightarrow E \end{array} \right\} \quad (4)$$

とし ϕ_2 だけが存在するケースを考える。

$$B_3 = f_{12} = \frac{\partial \phi_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \phi_1}{\partial x^2} = \frac{\partial \phi_2}{\partial x^1} \quad (5)$$

$$E_2 = f_{24} = \frac{\partial \phi_4}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi_2}{\partial x^4} = -\frac{\partial \phi_2}{\partial x^4} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \quad (6)$$

$$G = 0 \quad (7)$$

$$\phi_1 = \phi_3 = \phi_4 = 0 \quad (8)$$

$$\phi_2 = A_2 = A_y = \phi \quad (9)$$

とすると偏微分方程式

$$(1 + \chi^2 \phi_x^2) \phi_{tt} - 2\chi^2 (\phi_x \phi_t \phi_{xt}) - (c^2 - \chi^2 \phi_t^2) \phi_{xx} = 0 \quad (10)$$

が得られる。

3.2 平面波解の証明

以上のことが文献[4]にあるがその証明に関する記述や論文を探したが見つからなかった。そこで私は以下のように証明方法を推測した。

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x^1} = \phi_x \quad (11)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t} = \phi_t \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} = \phi_{tt} \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} = \phi_{xx} \quad (14)$$

$$B_3 = \phi_x \quad (15)$$

$$E_2 = -\frac{1}{c} \phi_t \quad (16)$$

ここでは ϕ はベクトルポテンシャル

(3.4A)より

$$c \operatorname{rot} H = \frac{\partial D}{\partial t} \quad (17)$$

左辺は(2.13A) (3.3A) (5) (6)より

$$\begin{aligned} c \operatorname{rot} H &= c \operatorname{rot} \left(\frac{B}{\sqrt{1+F}} \right) = -c \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\phi_x}{\sqrt{1+F}} \right) = -c \left(\frac{\frac{\partial \phi_x}{\partial x}}{\sqrt{1+F}} - \frac{\phi_x}{2(1+F)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial F}{\partial x} \right) = -c \left(\frac{\frac{\partial \phi_x}{\partial x}}{\sqrt{1+F}} - \frac{\phi_x}{2(1+F)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial F}{\partial x} \right) \\ &= -c \left(\frac{\phi_{xx}}{\sqrt{1+F}} - \frac{\phi_x}{2(1+F)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{b^2} (B^2 - E^2) \right) \right) = -c \left(\frac{\phi_{xx}}{\sqrt{1+F}} - \frac{\phi_x}{2(1+F)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{b^2} \left(\phi_x^2 - \frac{1}{c^2} \phi_t^2 \right) \right) \right) \\ &= -c \left(\frac{\phi_{xx}}{\sqrt{1+F}} - \frac{\phi_x}{2(1+F)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{b^2} \left(2\phi_x \phi_{xx} - \frac{1}{c^2} 2\phi_t \phi_{tx} \right) \right) = -c \left(\frac{\phi_{xx}}{\sqrt{1+F}} - \frac{\phi_x}{(1+F)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{b^2} \left(\phi_x \phi_{xx} - \frac{1}{c^2} \phi_t \phi_{tx} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -c \left(\frac{\phi_{xx}}{\sqrt{1+F}} - \frac{1}{(1+F)^{\frac{3}{2}} b^2} \left(\phi_x^2 \phi_{xx} - \frac{1}{c^2} \phi_x \phi_t \phi_{tx} \right) \right) \\
&= -\frac{c}{(1+F)^{\frac{3}{2}}} \left((1+F) \phi_{xx} - \frac{1}{b^2} \left(\phi_x^2 \phi_{xx} - \frac{1}{c^2} \phi_x \phi_t \phi_{tx} \right) \right) \\
&= -\frac{c}{(1+F)^{\frac{3}{2}}} \left(\left(1 + \frac{1}{b^2} (B^2 - E^2) \right) \phi_{xx} - \frac{1}{b^2} \left(\phi_x^2 \phi_{xx} - \frac{1}{c^2} \phi_x \phi_t \phi_{tx} \right) \right) \\
&= -\frac{c}{(1+F)^{\frac{3}{2}}} \left(\left(1 + \frac{1}{b^2} \left(\phi_x^2 - \frac{1}{c^2} \phi_t^2 \right) \right) \phi_{xx} - \frac{1}{b^2} \left(\phi_x^2 \phi_{xx} - \frac{1}{c^2} \phi_x \phi_t \phi_{tx} \right) \right) \quad (18)
\end{aligned}$$

右辺は (2. 12A) (2. 13A) (3. 3A) (5) (6) より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E - GB}{\sqrt{1+F - G^2}} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{-\frac{1}{c} \phi_t}{\sqrt{1+F}} \right) = -\frac{1}{c} \left(\frac{\frac{\partial \phi_t}{\partial t}}{\sqrt{1+F}} - \frac{\phi_t}{2(1+F)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial F}{\partial t} \right) = -\frac{1}{c} \left(\frac{\frac{\partial \phi_t}{\partial t}}{\sqrt{1+F}} - \frac{\phi_t}{2(1+F)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial F}{\partial t} \right) \\
&= -\frac{1}{c} \left(\frac{\frac{\partial \phi_t}{\partial t}}{\sqrt{1+F}} - \frac{\phi_t}{2(1+F)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{b^2} (B^2 - E^2) \right) \right) = -\frac{1}{c} \left(\frac{\phi_{tt}}{\sqrt{1+F}} - \frac{\phi_t}{2(1+F)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{b^2} \left(\phi_x^2 - \frac{1}{c^2} \phi_t^2 \right) \right) \right) \\
&= -\frac{1}{c} \left(\frac{\phi_{tt}}{\sqrt{1+F}} - \frac{\phi_t}{2(1+F)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{b^2} \left(2\phi_x \phi_{xt} - \frac{1}{c^2} 2\phi_t \phi_{tt} \right) \right) = -\frac{1}{c} \left(\frac{\phi_{tt}}{\sqrt{1+F}} - \frac{1}{(1+F)^{\frac{3}{2}} b^2} \left(\phi_t \phi_x \phi_{xt} - \frac{1}{c^2} \phi_t^2 \phi_{tt} \right) \right) \\
&= -\frac{1}{c(1+F)^{\frac{3}{2}}} \left((1+F) \phi_{tt} - \frac{1}{b^2} \left(\phi_t \phi_x \phi_{xt} - \frac{1}{c^2} \phi_t^2 \phi_{tt} \right) \right) \\
&= -\frac{1}{c(1+F)^{\frac{3}{2}}} \left(\left(1 + \frac{1}{b^2} (B^2 - E^2) \right) \phi_{tt} - \frac{1}{b^2} \left(\phi_t \phi_x \phi_{xt} - \frac{1}{c^2} \phi_t^2 \phi_{tt} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{c(1+F)^{\frac{3}{2}}} \left(\left(1 + \frac{1}{b^2} \left(\phi_x^2 - \frac{1}{c^2} \phi_t^2 \right) \right) \phi_{tt} - \frac{1}{b^2} \left(\phi_t \phi_x \phi_{xt} - \frac{1}{c^2} \phi_t^2 \phi_{tt} \right) \right) \quad (19)$$

従って

$$c^2 \left(\left(1 + \frac{1}{b^2} \left(-\frac{1}{c^2} \phi_t^2 \right) \right) \phi_{xx} - \frac{1}{b^2} \left(-\frac{1}{c^2} \phi_x \phi_t \phi_{tx} \right) \right) = \left(\left(1 + \frac{1}{b^2} \left(\phi_x^2 \right) \right) \phi_{tt} - \frac{1}{b^2} \left(\phi_t \phi_x \phi_{xt} \right) \right) \quad (20)$$

であるので

$$\left(1 + \frac{\phi_x^2}{b^2} \right) \phi_{tt} - \frac{2}{b^2} \left(\phi_t \phi_x \phi_{xt} \right) - \left(c^2 - \frac{\phi_t^2}{b^2} \right) \phi_{xx} = 0 \quad (21)$$

$\chi = \frac{1}{b}$ として

$$\left(1 + \chi^2 \phi_x^2 \right) \phi_{tt} - 2\chi^2 \left(\phi_x \phi_t \phi_{xt} \right) - \left(c^2 - \chi^2 \phi_t^2 \right) \phi_{xx} = 0 \quad (22)$$

が証明できた。

この偏微分方程式は Born Infeld Equation と呼ばれている。

3.3 パルス・ソリトン解

上記の Born Infeld Equation には解が存在する。

Pulse Soliton Solutions of the Modified KdV and Born-Infeld Equations

Jean Roger Bogning[5]

$\chi=1, c=1$ とすると

$$\phi = \operatorname{sech}^n(\pm a_0(x-t)) \quad (23)$$

ただし $a_0 \neq 0$ n は整数

と文献[5]にあるが、これでは進行波のみになってしまうため

$$\phi = \operatorname{sech}^n(a_0(x \pm t)) \quad (23)$$

と訂正するべきと推測する。

図 3-1 に $n=1, t=0$ のときの波形を示す。

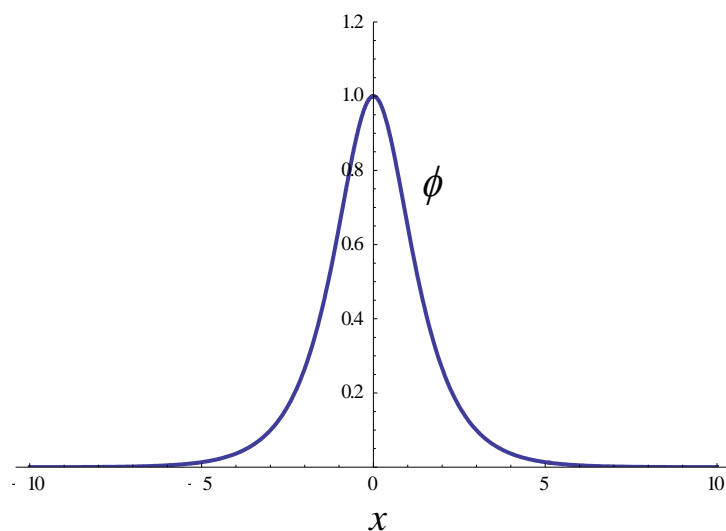


図 3-1 $\phi = \operatorname{sech}^n(a_0(x \pm t)), n=1, t=0$

この解は平面波の進行波と後退波でありパルス・ソリトン解とも呼ばれている。

第4章 まとめ

1934年にボルンとインフェルトが書いた「Foundations of the New Field Theory」という論文を原文で読み、それがマックスウェル方程式に非線形項を導入したモデルであり点電荷の周囲の電磁エネルギーの発散の困難を解決する仮説であることを確認した。この論文はボルン・インフェルト理論と呼ばれているがこの理論から偏微分方程式の平面波解が求められ Born Infeld Equation と呼ばれている。ボルン-インフェルト理論は量子論への移行は成功していないが現在、超弦理論のなかで有効理論として盛んに議論されている。[2]

自分なりのイメージではあるが Born Infeld 理論に関わる知識の繋がりを概念マップ[9]として表現してみた。

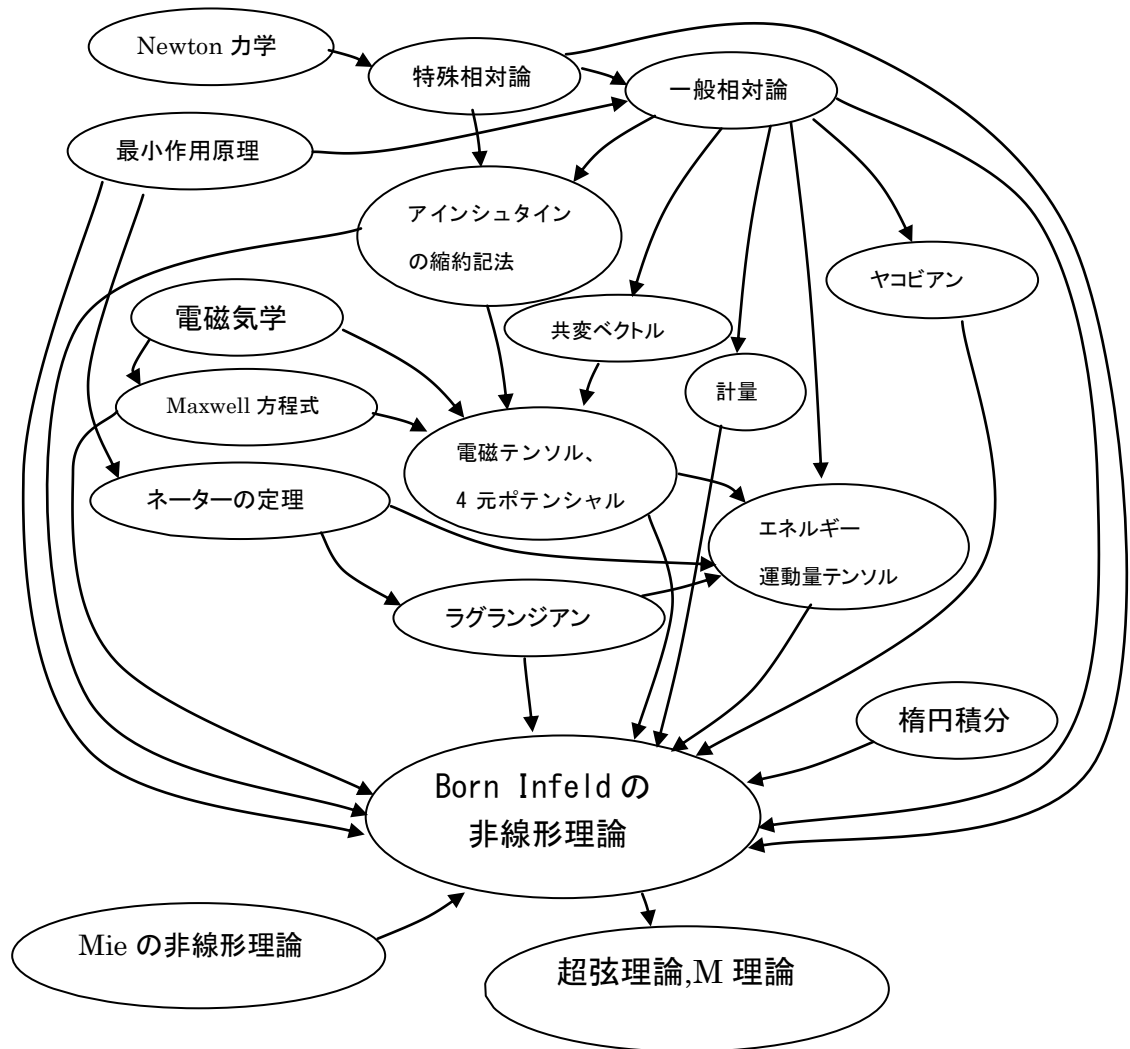


図 4-1 Born Infeld 理論に関わる概念マップ

このように今まで別個と思っていたり未知であった自分の知識が今回の調査でそれぞれに繋がりを持っていることが実感できた。

謝辞

本研究を進めるにあたり、ご指導を頂いた米谷民明教授に感謝致します。米谷先生には私のメールや口頭による質問にも大変丁寧に答えて頂くとともに時には科学的態度についても厳しく指導して頂きました。また、ゼミを通じて多くの知識や示唆を頂いた岸根順一郎教授、松井哲男教授、共に学んだ修士全科生の皆さまに感謝致します。

参考文献

- [1] Foundations of the New Field Theory M. Born and L. Infeld
Proc. R. Soc. Lond. A 1934 144, doi: 10.1098/rspa.1934.0059,
ROYAL SOCIETY PUBLISHING
- [2] NON-LINEAR ELECTRODYNAMICS FROM QUANTIZED STRINGS
E. S. FRADKIN and A. A. TSEYTLIN
P. N. Lebedev Physical Institute, Leninsky pr. 53, Moscow 117924, USSR
Received 6 June 1985
- [3] 場と時間空間の物理 米谷民明 岸根順一郎 発行 2014年3月20日
一般財団法人 放送大学教育振興会
- [4] BORN-INFELD EQUATIONS Alexander A. Chernitskii
Submitted on 13 Sep 2005
arXiv.org
- [5] Pulse Soliton Solutions of the Modified KdV and Born-Infeld Equations
Jean Roger Bogning
International Journal of Modern Nonlinear Theory and Application
Vol. 2 No. 2 (2013)
- [6] 新訂「力と運動の物理」 米谷民明 岸根順一郎 発行 2013年3月20日
一般財団法人 放送大学教育振興会
- [7] 「現代物理科学の論理と方法」 米谷民明 発行 2013年3月20日 一般財団
法人 放送大学教育振興会
- [8] 理論電磁気学 第3版 砂川重信 1999年9月16日 紀伊国屋書店
- [9] The theory underlying concept maps and how to construct and use them
Alberto J. Cañas Joseph D. Novak
Universidade Estadual de Ponta Grossa, 2010.